

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THÈSE
DE DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES APPLIQUÉES

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

par

M. Abderrazak CHAABOUNI

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES APPLIQUÉES

**Comportement Mécanique
des Matériaux sous irradiation**

Soutenue le 15 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. R. SIESTRUNCK, *Président*

**R. VICHNIEVSKI
D. RADENKOVIC
L. PATARIN** } *Examineurs*

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THÈSE
DE DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES APPLIQUÉES

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

par

M. Abderrazak CHAABOUNI

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES APPLIQUÉES

**Comportement Mécanique
des Matériaux sous irradiation**

Soutenue le 15 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. R. SIESTRUNCK, *Président*

R. VICHNIEVSKI	}	<i>Examineurs</i>
D. RADENKOVIC		
L. PATARIN		

THÈSE

DE DOCTORAT DE LA FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Présentée

à l'Université de Liège

par

M. Alexandre CHABRIAT

pour obtenir

le grade de docteur en sciences appliquées



Comportement Mécanique
des Matériaux sous Irradiation

Examinée le 13 décembre 1954 devant la Commission d'Examen

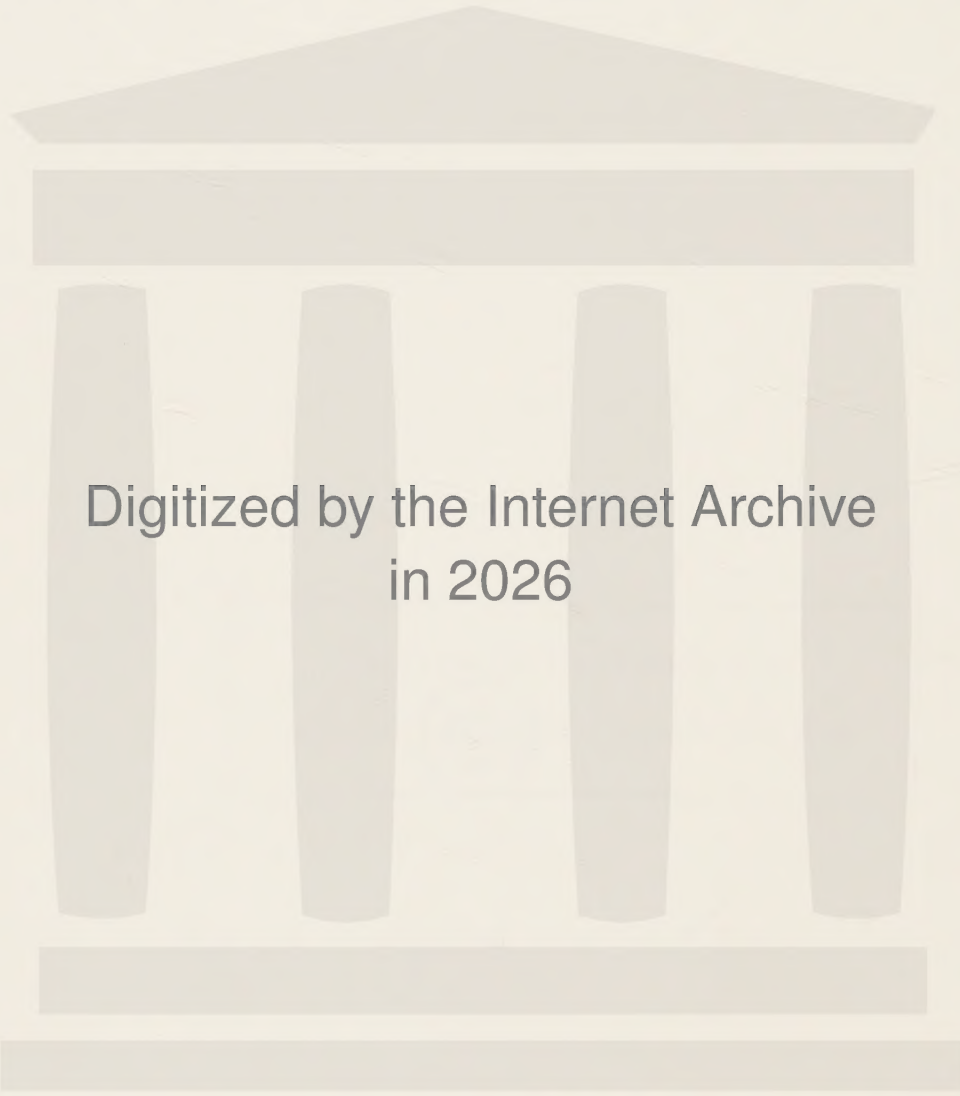
M. le Président de la Commission

M. le Rapporteur

M. le Rapporteur

M. le Rapporteur

COMPORTEMENT MECANIQUE
DES MATERIAUX SOUS IRRADIATION



Digitized by the Internet Archive
in 2026

AVANT-PROPOS

Que Monsieur le Professeur SIESTRUNCK qui m'a toujours aidé et conseillé, et a bien voulu présider mon jury de thèse, et Monsieur le Professeur VICHNIEVSKI qui a bien voulu en faire partie, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur MANDEL, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, qui m'a accueilli dans son Laboratoire.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur RADENKOVIC, qui a dirigé mes recherches et ne m'a jamais ménagé ni ses conseils, ni ses critiques.

Mes remerciements vont aussi particulièrement à Monsieur HABIB, Directeur Adjoint du Laboratoire, qui m'a toujours conseillé et aidé à surmonter tous les obstacles.

Je remercie aussi Monsieur PATARIN, Ingénieur au Centre d'Etudes Nucléaires, d'avoir accepté de faire partie de mon jury et a su me familiariser avec la technologie des réacteurs nucléaires.

Cette étude a été menée à son terme grâce à l'aide du Commissariat à l'Energie Atomique.

Je voudrais enfin remercier Monsieur QUÉRÉ, du Centre d'Etudes Nucléaires de Fontenay-aux-Roses pour ses nombreuses remarques et son accueil chaleureux, ainsi que tous mes collègues et amis chercheurs, secrétaires et techniciens du Laboratoire, pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : Effets mécaniques de l'irradiation sur le graphite Analogie avec la viscoélasticité.

I.1 - Généralités:

- I.1.1 - Mode de fabrication du graphite.
- I.1.2 - Interaction d'un neutron et de la structure cristalline.

I.2 - Déformation du graphite sous irradiation et contrainte:

- I.2.1 - Effet Wigner.
- I.2.2 - Déformation sous contrainte et hors irradiation.
- I.2.3 - Déformation sous irradiation et en absence de contrainte.
- I.2.4 - Déformation sous irradiation et contrainte.

I.3 - Rappel de la théorie de la thermo-viscoélasticité:

- I.3.1 - Viscoélasticité sous température uniforme.
- I.3.2 - Influence de la température : Corps thermorhéologiquement simple.

CHAPITRE II : Loi de comportement du graphite.

II.1 - Hypothèses de généralisation.

II.2 - Viscoélasticité d'irradiation:

- II.2.1 - Formulation intégrale de la loi de comportement.
- II.2.2 - Autre présentation de la loi de comportement.
- II.2.3 - Généralisation de la notion de corps viscoélastique rhéologiquement simple.

II.3 - Influence de la température:

- II.3.1 - Température stationnaire.
- II.3.2 - Température variable.

II.4 - Equations générales de la viscoélasticité d'irradiation:

- II.4.1 - Equations en fonction de x et de γ .
- II.4.2 - Equations en fonction de x et de t .

II.5 - Etude des cas particuliers en vue des applications :

- II.5.1 - Flux de neutrons stationnaire ou constant.
- II.5.2 - Symétrie du matériau.
- II.5.3 - Cas particuliers simples : Modèles rhéologiques.

CHAPITRE III : Applications aux structures en graphite.

III.1 - Discussion des méthodes de résolution en viscoélasticité

III.1.1 - Méthodes analytiques.

III.1.2 - Méthodes de résolution numériques.

III.2 - Résolution par inversion du système d'équations de Volterra.

III.2.1 - Ablation et effet thermique dans un cylindre viscoélastique. EDELSTEIN (1969).

III.2.2 - Effet thermique dans une sphère viscoélastique.

III.3 - Résolution par les transformées de Carson:

III.3.1 - Mur infini de graphite sous irradiation
Effet des cyclages thermiques.

III.3.2 - Cylindre creux soumis à un flux de révolution.

III.3.3 - Cylindre creux soumis à un flux dyssymétrique.

III.3.4 - Sphère bicouche.

III.4 - Résolution numérique:

III.4.1 - Résolution par itération de la solution élastique.

III.4.2 - Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de viscoélasticité d'irradiation .

CHAPITRE IV : Introduction à l'étude du comportement mécanique des métaux sous irradiation.

IV.1 - Interaction entre particules élémentaires et réseau cristallin

IV.1.1. - Différents types de particules élémentaires.

IV.1.2. - Processus de déplacement d'atomes.

IV.1.3. - Collision de remplacement.

IV.1.4. - Section efficace.

IV.1.5. - Parcours moyen libre.

IV.1.6. - Nombre d'atomes déplacés.

IV.1.7. - Limitation **et** raffinement de la théorie.

IV.2 - Effets de l'irradiation sur les propriétés mécaniques des métaux

IV.3 - Comportement sous irradiation et contrainte des métaux

- IV.3.1. - Déformation sous irradiation.
- IV.3.2. - Fluage sous irradiation.
- IV.3.3. - Mécanismes responsables de la modification du fluage sous irradiation.
- IV.3.4. - Forme générale de la loi de comportement.
- IV.3.5. - Conclusion sur le fluage sous irradiation des métaux.

INTRODUCTION

L'irradiation d'un matériau cristallin par des particules élémentaires telles que les neutrons ou les électrons provoque des modifications importantes à son réseau atomique. Avec le développement de l'industrie nucléaire est née une science nouvelle dont l'objet est l'étude des effets ou dommages provoqués par l'irradiation sur les propriétés physiques, chimiques et mécaniques des matériaux. Les physiciens du solide expliquent par des mécanismes microscopiques divers ces modifications. On s'intéresse dans cette étude essentiellement aux effets de l'irradiation sur les propriétés mécaniques des matériaux. Les recherches expérimentales dans ce domaine ont consisté, surtout au début, à irradier simplement un échantillon d'un matériau quelconque, sous une température donnée et puis d'étudier les déformations qu'il subit ainsi que les modifications de ses propriétés mécaniques telles que le module d'Young, la limite d'écoulement, l'écrouissage ou la fragilisation.

Ce type d'expérience s'est révélé insuffisant pour permettre de prévoir la tenue des matériaux dans les réacteurs nucléaires, car leurs différents éléments sont soumis non seulement à l'irradiation mais aussi à des contraintes. L'irradiation étant un phénomène lent les différents chercheurs ont commencé à étudier le fluage des matériaux sous irradiation.

Par notre approche, on se propose de dégager à partir des résultats expérimentaux et théoriques une loi de comportement des matériaux sous irradiation et contrainte en vue des applications des calculs de structure de réacteurs nucléaires.

Notre attention s'est portée essentiellement sur le graphite parce que ce matériau a occupé une place importante dans les réacteurs nucléaires conçus en France. D'autre part les résultats expérimentaux d'irradiation concernant le graphite sont parmi les plus complets. On aborde au dernier chapitre le même problème mais de façon globale, pour les métaux afin d'avoir une vue d'ensemble sur le comportement des solides sous irradiation.

Le plan de l'étude s'établit comme suit : les trois premiers chapitres sont consacrés au graphite et le quatrième aux métaux.

Chapitre I

On décrit brièvement le mode de fabrication et les propriétés physiques du graphite. Des considérations sur l'interaction d'un neutron et d'un réseau cristallin, que l'on développe surtout au chapitre IV, montrent que les effets de l'irradiation dépendent du nombre total de neutrons appelé dose ou flux intégré et défini par

$$(1) \quad \gamma(x,t) = \int_0^t \phi(x,t') dt'$$

$\phi(x,t)$ est le flux instantané de neutrons, et t est le temps d'exposition. La température à laquelle se produit l'irradiation est aussi un facteur important.

Au § I.2. on décrit les déformations que subit le graphite sous irradiation et contrainte agissant ensemble ou séparément. Quand le graphite est irradié en absence de contrainte il subit des déformations importantes, généralement appelées déformations Wigner ; elles dépendent de la dose reçue, de la température et de la nature du matériau. L'irradiation du graphite sous contrainte fait apparaître un fluage important, appelé fluage d'irradiation alors que le fluage thermique, à la même température, est tout à fait négligeable. Les travaux de PERKS et SIMMONS et de KENNEDY confirmés par d'autres auteurs montrent qu'en première approximation la déformation totale ϵ^t sous irradiation, contrainte et température s'écrit :

$$\epsilon^t = \epsilon^e + w + \alpha T + f$$

C'est la somme de la déformation élastique ε^e , de la déformation Wigner w due à l'irradiation seule, de la déformation thermique αT et d'une déformation de fluage f due à l'effet combiné de l'irradiation et de la contrainte.

Si on représente, en fonction de la dose γ , la déformation de fluage f obtenue à partir d'une expérience où la contrainte est maintenue constante, on constate que la courbe se compose de deux parties. La pente $\frac{df}{d\gamma}$ de la première partie est décroissante, c'est le fluage transitoire, il est réversible ; la deuxième partie a une pente constante, c'est le fluage secondaire.

D'autre part les résultats expérimentaux montrent que la déformation de fluage est proportionnelle à la contrainte appliquée. Les caractéristiques visqueuses de ce fluage nous amènent à rappeler la théorie de la thermoviscoélasticité. On étudiera en particulier les corps thermo-rhéologiquement simples définis par SCHWARZL et STAVERMAN, pour en déduire au chapitre suivant une analogie avec le comportement du graphite sous irradiation.

Chapitre II

On formule les hypothèses qui nous permettent d'établir la loi de comportement du graphite. En admettant que la déformation de fluage est une fonctionnelle linéaire de la contrainte en fonction de la dose γ ; on obtient dans le cas général pour la loi de comportement :

$$(2) \quad \varepsilon_{ij}(x, \gamma) - w_{ij}(\gamma) = \int_0^\gamma \kappa_{ijk}(\gamma - \gamma') \frac{\partial \sigma_{ke}(x, \gamma')}{\partial \gamma'} d\gamma'$$

L'application de la transformation de Carson de variable γ et de paramètre q , à la relation (2) permet d'obtenir des relations de comportement formellement analogues à celles de l'élasticité, mais dépendant du paramètre q :

$$(3) \quad \varepsilon_{ij}(x, q) - w_{ij}(q) = \kappa_{ijk}(q) \sigma_{ke}(x, q)$$

En se rappelant la définition de la dose donnée par (1), on peut écrire les relations (2) en fonction de x et du temps t :

$$(4) \quad \varepsilon_{ij}(x, t) - w_{ij}(\gamma(x, t)) = \int_0^t K_{ijne} [\gamma(x, t) - \gamma(x, t')] \frac{\partial \delta_{ne}(x, t')}{\partial t'} dt'$$

Sous les différentes formes (2), (3), (4), on reconnaît la loi de comportement d'un matériau viscoélastique thermo-rhéologiquement simple. La relation d'équivalence entre le temps et la température qu'admettent les corps rhéologiquement simples, est remplacée pour le graphite sous irradiation par une relation entre le flux de neutrons Φ et le temps t qui définit la dose. L'analogie entre les deux comportements est donc totale et on propose de qualifier de rhéologiquement simple tout corps viscoélastique admettant une relation d'équivalence entre le temps réel et un autre facteur physique.

On étudie l'influence de la température au § II.3. Une température non homogène et variable rend complexes les relations de comportement. Pour les applications pratiques, on ne considérera que des températures stationnaires, car généralement elles se stabilisent très vite à l'intérieur du réacteur.

Pour un problème de viscoélasticité d'irradiation, il faut écrire les équations générales soit en fonction de x et de la dose γ , soit en fonction de x et du temps t . Dans le premier cas, la transformée de Carson permet d'avoir des relations de comportement analogues à celles de l'élasticité, mais les autres équations (équilibre, compatibilité) sont modifiées. Nous n'avons plus l'analogie élastique quand on utilise les variables x et t , mais les autres équations sont conservées. Dans le cas général, la résolution du problème de viscoélasticité d'irradiation s'avère difficile.

En vue des applications, on examine au § II.4. comment se simplifie la loi de comportement dans quelques cas particuliers.

Ainsi quand le flux est stationnaire, la dose s'écrit :

$\gamma = \phi(x)t$ et dans les relations (4) il apparaît des produits de convolution : on est ramené dans ce cas à la viscoélasticité hétérogène. Le cas du flux constant nous ramène tout simplement à la viscoélasticité classique. On explicite enfin les relations de comportement très simples que l'on obtient à partir des modèles rhéologiques de MAXWELL et BURGHERS.

Chapitre III

On discute les méthodes de résolution analytique et numérique du problème de viscoélasticité hétérogène avec vieillissement. On rappelle la solution très générale du problème du cylindre obtenue par EDELSTEIN par inversion d'un système d'équations intégrales de Volterra. Nous donnons une solution analogue pour la sphère. Par les transformées de Carson on obtient la solution de quelques problèmes de contraintes dans les éléments en graphite de réacteur nucléaire : mur infini, cylindre creux soumis à un flux symétrique ou dissymétrique, et sphère bicouche.

On expose brièvement une méthode de résolution numérique basée sur la relaxation élastique. On montre enfin comment la méthode des éléments finis peut être étendue aux problèmes viscoélastiques.

Chapitre IV

Ce chapitre constitue une introduction à l'étude du comportement mécanique des métaux sous irradiation. On commence par rappeler la théorie de l'interaction d'une particule élémentaire et d'un réseau cristallin. On décrit rapidement les effets de l'irradiation sur les propriétés mécaniques des métaux. On aborde ensuite le comportement sous irradiation et contrainte. L'irradiation seule peut provoquer une augmentation volumique appelée gonflement par la création de cavités remplies de gaz de fission. Elle entraîne dans les métaux à structure cristalline anisotrope une déformation déviatorique appelée croissance. Quand l'irradiation a lieu sous contrainte il se superpose au gonflement et à la

croissance des déformations de fluage. L'étude du fluage des métaux sous irradiation est encore à ses débuts, les résultats sont souvent qualitatifs. On peut distinguer néanmoins le fluage thermique du fluage d'irradiation ; on arrive à dégager, à partir de différents travaux, une forme générale de loi de comportement des métaux sous irradiation et contrainte.

CHAPITRE I

EFFETS MECANIKES DE L'IRRADIATION SUR LE GRAPHITE
ANALOGIE AVEC LA VISCOELASTICITE

I.1. - GENERALITES.

Le graphite a d'abord été utilisé pour les électrodes, auourd'hui il a plusieurs applications industrielles. Dans cette étude, on s'intéresse uniquement à l'utilisation du graphite dans les réacteurs nucléaires. Son rôle est de ralentir les neutrons sans les absorber, transformant ainsi leur énergie cinétique en énergie thermique. Un gaz circulant dans le graphite permet de récupérer la chaleur dégagée et de la convertir en énergie électrique par l'intermédiaire de turbines et d'alternateurs.

Avant d'étudier l'effet de l'irradiation sur le comportement du graphite, il est important de décrire brièvement ce matériau.

I.1.1 - Mode de fabrication et structure du graphite.

On peut ainsi résumer le mode de fabrication des graphites : le coke de pétrole préalablement calciné et broyé, mélangé à chaud avec un brai donne une pâte homogène qui est filée. Ce produit est cuit, puis imprégné de nouveau de brai et recuit à haute température 2500° - 3000° . C'est à cette température que se produit la graphitisation. La transformation est toujours incomplète. Les graphites nucléaires ont toujours des zones parfaitement cristallisées, appelées cristallites, reliées entre elles par des zones amorphes où la cristallisation n'a pu se produire.

La structure cristalline est illustrée par la figure (1).

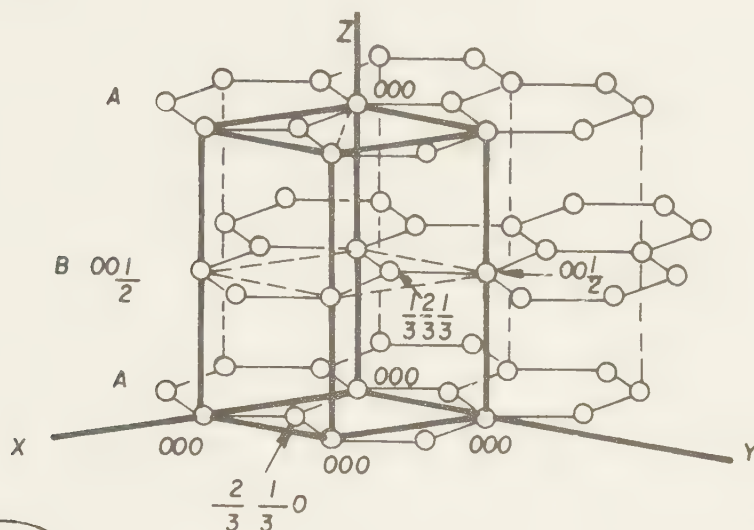


Figure:1

Cristal idéal de graphite d'après Reynolds [23]

Le plan basal est constitué d'hexagones avec une distance interatomique de 1,415 Å. Ces plans sont empilés en séquences, alternés et séparés par une distance de 3,359 Å. Ce monocristal est donc anisotrope.

Le filage du graphite fournit un produit à symétrie transversale; mais certains graphites obtenus par pressage sont isotropes.

I.1.2 - Interaction des neutrons et de la structure cristalline.

L'effet de l'irradiation sur les corps cristallins est toujours basé sur le processus suivant (voir (1) et (3)) : la particule incidente (neutron, proton, atomes, etc.) ayant une énergie E_i vient heurter un atome de la structure cristalline et leur transmet une énergie E_t . Si cette énergie E_t est supérieure à un certain seuil E_d , qui dépend de la température, l'atome cible quitte son site et devient à son tour particule incidente. Il vient heurter un autre atome de la structure, lui transférant une énergie E_{t1} et ainsi de suite. C'est le phénomène de la cascade. L'atome s'immobilisera dès que son énergie sera inférieure au seuil E_d . On développera plus en détail au § IV.1.1. le processus d'interaction entre particules élémentaires et réseau cristallin.

Chaque atome déplacé laisse un site vacant ou lacune qui peut être occupé par un autre atome. On dit qu'il y a recombinaison, d'autres atomes déplacés viennent occuper des positions anormales ou intersticielles. Les atomes intersticiels et les lacunes peuvent se regrouper en petite boucle de dislocation. D'autres enfin sont absorbés par des dislocations existantes. Les lacunes peuvent se regrouper en cavité provoquant ainsi un gonflement important du matériau. Les physiciens du Solide principalement ceux qui s'intéressent à la technologie nucléaire, étudient les conditions d'apparition de toutes ces irrégularités. Ils arrivent ainsi à expliquer l'écrouissage, la fragilisation et d'autres modifications des propriétés mécaniques des matériaux dues à l'irradiation.

Cet aperçu des phénomènes microscopiques permet de déterminer les grandeurs physiques dont dépendent les dommages dûs à l'irradiation. Si on suppose que tous les neutrons ont une énergie moyenne identique, on peut admettre comme le font tous les expérimentateurs, que les effets macroscopiques dépendent essentiellement du nombre de neutrons, ou dose, reçus par le matériau et de la température de l'irradiation.

La dose de neutrons est défini par :

$$(1) \quad \gamma(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t') dt'$$

où $\varphi(x, t)$ est le flux de neutrons et x représente le vecteur des coordonnées spatiales x_1, x_2, x_3 et t le temps d'irradiation.

I.2 - DEFORMATION DU GRAPHITE SOUS IRRADIATION ET CONTRAINTE.

I.2.1 - Effet Wigner.

Dès 1942, Wigner prévoyait que les neutrons rapides en déplaçant les atomes provoquent des déformations cristallines. C'est l'effet Wigner, et les déformations macroscopiques qui en résultent en absence de contrainte sont appelées déformations Wigner.

Pendant longtemps, les pièces des empilements de graphite dans les réacteurs nucléaires, type : graphyte-gaz, ont été dessinés avec beaucoup de prudence de façon à donner toute liberté à ces déformations Wigner. Mais depuis une dizaine d'années, les recherches sur le comportement mécanique du graphite ont montré que l'irradiation sous contrainte modifie complètement les déformations obtenues par une irradiation sous contrainte.

Les expérimentateurs et physiciens ont qualifié de fluage, les déformations additionnelles dues à l'effet combiné de l'irradiation et de la contrainte. Ce phénomène a entraîné des changements importants dans la conception des empilements et de leur calcul. Pour formuler des lois de comportement générales du graphite sous irradiation et contrainte, il faut commencer par décrire, à partir des résultats expérimentaux, les déformations que subit le matériau dans différentes conditions d'irradiation.

I.2.2 - Déformation sous contrainte et hors irradiation.

Le graphite vierge, ou non irradié, a une relation contrainte-déformation non linéaire. A la première décharge, il apparaît une déformation permanente et pour le cycle charge décharge , il apparaît une boucle d'hystérésis. La figure (2) montre les cycles charge-décharge pour un graphite vierge.

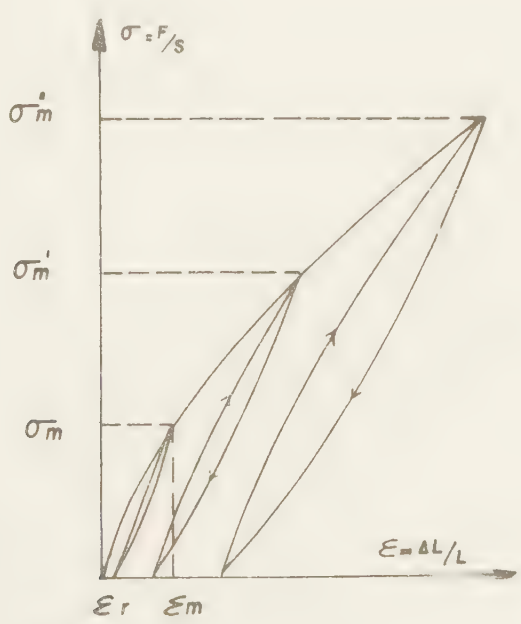
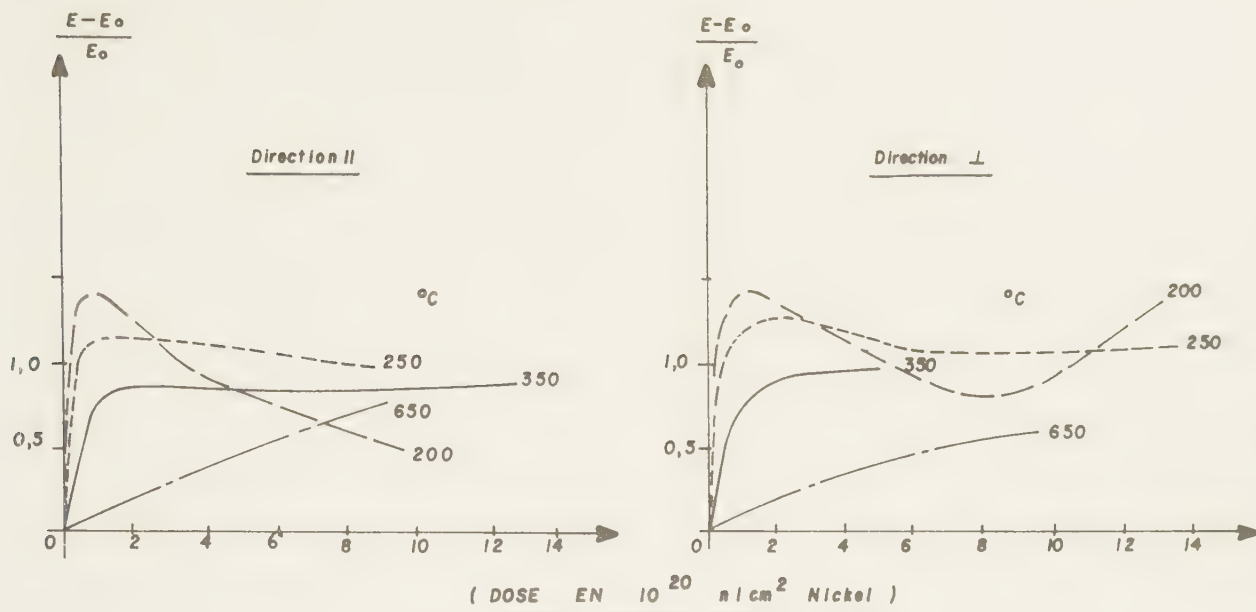


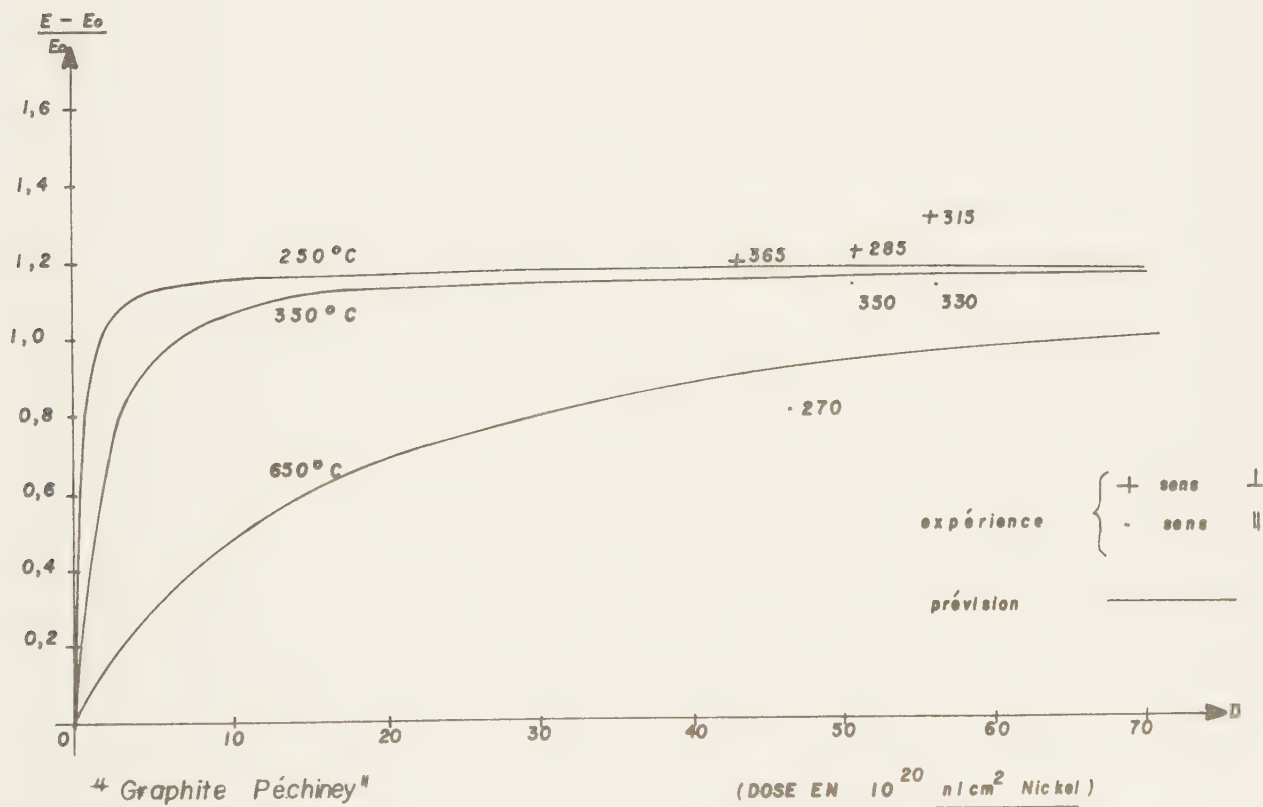
FIG. 2
 Diagramme contrainte déformation du
 graphite vierge " d'après [24]

Le graphite irradié a, d'après SIMMONS (25), une relation contrainte-déformation instantanée à peu près linéaire et n'a plus de boucle d'hystérésis. Son module d'Young augmente rapidement au début de l'irradiation. On admettra dans les applications que le graphite est parfaitement élastique et que son module d'Young est égal à la valeur observée au palier (voir figure (3)). Les variations du coefficient de Poisson avec l'irradiation ont été données par BLOCKLEHURST et LYNAM (2).

Le fluage du graphite hors irradiation, ou fluage thermique, ne devient important que pour des températures de 2500° C. Voir (19). On s'intéresse, dans cette étude, à des températures beaucoup moins élevées : 200 - 600° pour les réacteurs graphite-gaz, et 800° - 1200° pour les réacteurs de la 2ème génération - dit à haute température. On néglige donc dans cette étude, tout fluage thermique.



(d'après SIMMONS 1962)



$$\left(\text{LOI THEORIQUE } \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{1,20 D}{D + 0,8 \cdot 10^{10} \theta^4} \quad \theta \text{ en } ^{\circ}\text{C} \right)$$

Figure: 3

Effet de l'irradiation sur
le module d'élasticité

I.2.3 - Déformation sous irradiation en absence de contrainte.

Généralement appelées déformations Wigner, les déformations du graphite en absence de contrainte dépendent de la dose de neutrons reçue, de la température et de la qualité du matériau. Les résultats expérimentaux sont rares et concernent généralement des graphites particuliers dans une zone de température déterminée. C'est pourquoi des approches théoriques de ces déformations Wigner ont été tentées. La plus cohérente, longtemps utilisée pour les besoins des applications est due à SIMMONS et NETTLEY (16) et (17). Cette théorie peut se résumer ainsi :

1°) il existe une relation entre la déformation des cristallites du graphite et celle du matériau polycristallin de la forme :

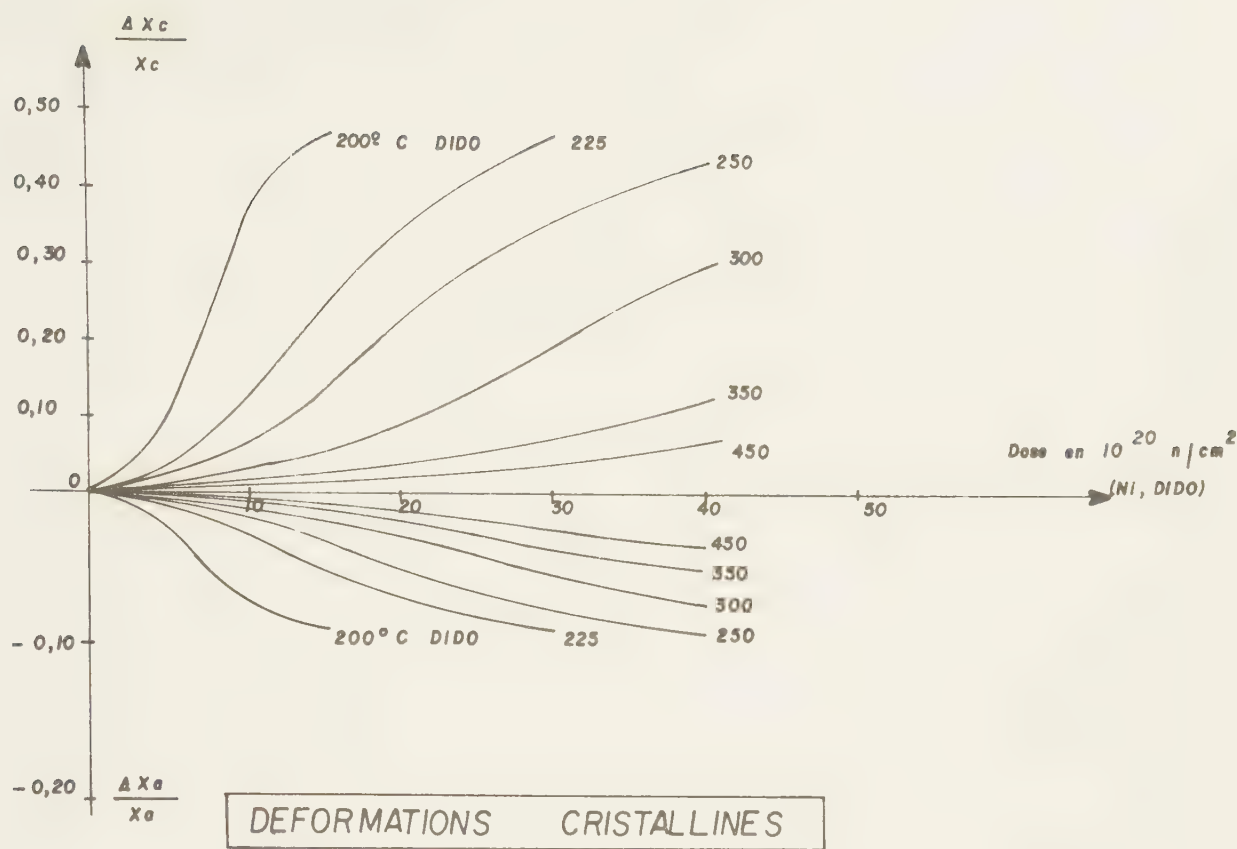
$$(2) \quad \left(\frac{\Delta l}{l} \right)_x = A_x \left(\frac{\Delta x_c}{x_c} \right) + (1 - A_x) \left(\frac{\Delta x_a}{x_a} \right)$$

où $\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_x$ est la déformation du graphite dans la direction X .
 $\frac{\Delta x_c}{x_c}$ et $\frac{\Delta x_a}{x_a}$ sont les déformations cristallines dans les directions cristallographiques c et a , et A_x est un paramètre caractéristique du graphite considéré.

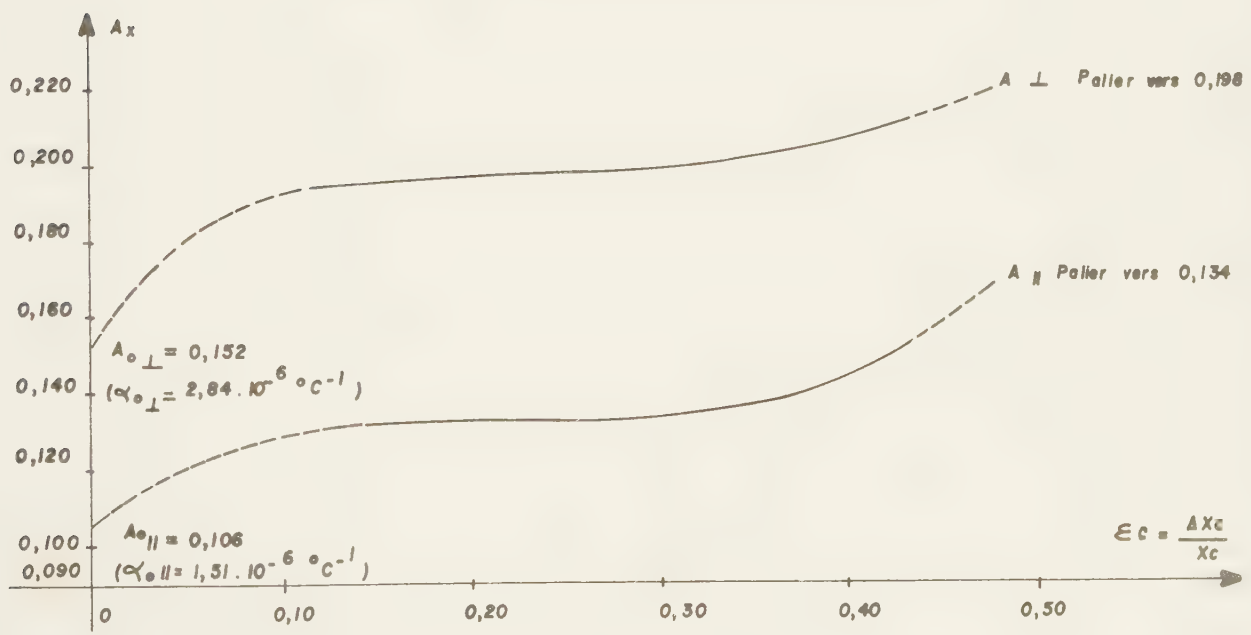
2°) il n'a pas été possible jusqu'ici de mesurer les déformations cristallines. $\frac{\Delta x_c}{x_c}$ et $\frac{\Delta x_a}{x_a}$: SIMMONS suppose que la dilatation thermique du graphite fait intervenir les mêmes paramètres A_x suivant la relation :

$$\alpha_x = A_x \alpha_c + (1 - A_x) \alpha_a$$

où α_x est le coefficient de dilatation thermique linéaire du graphite dans la direction X, et c et a sont les mêmes coefficients pour le cristal dans la direction c et a. Les déformations cristallines sont alors directement évaluées par la relation (2) où sont reportés à la fois $\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_\perp$ et $\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_\parallel$ et les valeurs $A_\perp$, $A_\parallel$.



(d'après les prévisions de NETTLEY, 1962)



VALEURS DU PARAMETRE A_x , EN FONCTION DE LA
DEFORMATION CRISTALLINE $\frac{\Delta X_c}{X_c}$ (dose Ni de 37 à 56 $\cdot 10^{20} \text{ n/cm}^2$)

Figure : 4

3°) il existe une relation d'équivalence entre la température et le flux d'irradiation, appelée formule de Bridge :

$$\frac{1}{T_{eq.}} - \frac{1}{T_{ir.}} = \frac{K}{Q} \log. \frac{\phi_{ir}}{\phi_{eq.}}$$

où $T_{ir.}$, et ϕ_{ir} sont respectivement les températures absolues et le flux du réacteur envisagé. $T_{eq.}$ et $\phi_{eq.}$ sont les températures absolues et le flux du réacteur de référence. K est la constante de BOLTZMAN et Q une chaleur d'activation. La figure (4) représente le réseau de déformations cristallines et ses paramètres $A_{//}$ et $A_{\perp}$ construits par NETTLBY (19) avec les résultats de SIMMONS.

Mais cette théorie est fortement divergente avec les expériences surtout aux fortes doses. On préfère actuellement ne prendre en considération dans les applications que les résultats expérimentaux dans la mesure où ils sont disponibles.

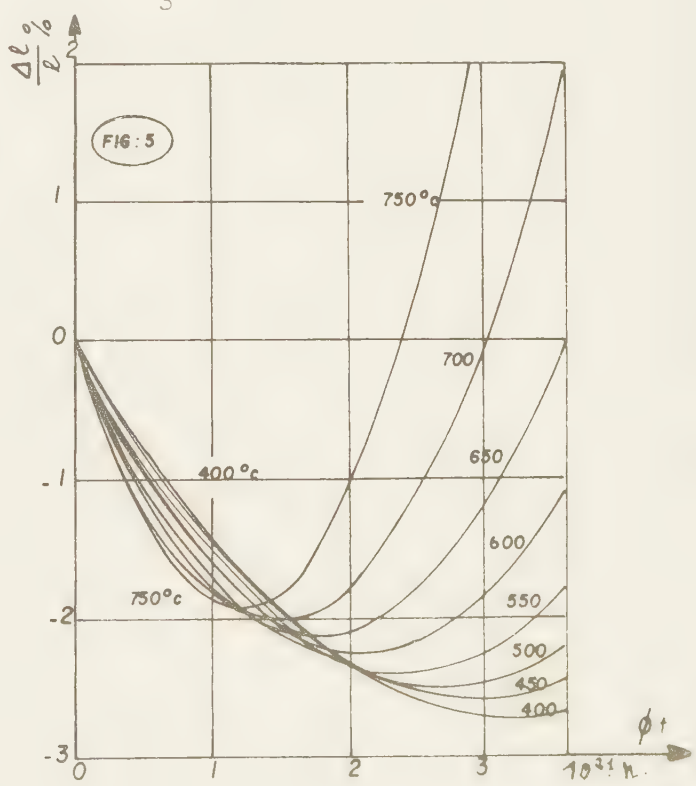
On admet dans cette étude que les déformation Wigner sont des fonctions connues de la dose γ et de la température T , à partir, soit d'une théorie physique, soit d'expériences d'irradiation. Les graphites étant souvent à symétrie transversale, le tenseur W_{ij} des déformations Wigner s'écrit dans un repère X_1, X_2, X_3 , où X_3 est la direction du filage :

$$W_{11} = W_t(T, \gamma)$$

$$W_{22} = W_t(T, \gamma)$$

$$W_{33} = W_l(T, \gamma)$$

les autres composantes sont nulles.



La figure (5) montre les déformations Wigner en fonction de la température et de la dose pour le graphite américain GILSO d'après (11)

I.2.4 - Déformation sous irradiation et contrainte.

La déformation d'une éprouvette de graphite sous irradiation et contrainte ne peut s'expliquer en terme de déformation élastique et de déformation Wigner. Il apparaît un phénomène de fluage dû à l'action simultanée de l'irradiation et de la contrainte. La mise en évidence de ce fluage s'est faite à l'aide d'expériences sur des éprouvettes où l'état de contrainte dépendait d'un seul paramètre (contrainte uniaxiale, ou dues à une flexion). Cela se conçoit facilement quand on pense aux difficultés d'opérer sous irradiation, sous haute température, et pendant des temps très longs. Même sur les métaux, les expériences de fluage classiques sous des états de contraintes triaxiaux sont très rares.

Dans ce paragraphe, on appelle les principaux résultats obtenus sur le fluage uniaxial. La généralisation des lois expérimentales au cas tridimensionnel est l'objet du 2ème chapitre.

La déformation totale d'une éprouvette sous une contrainte uniaxiale σ , irradiée dans un flux uniforme $\varphi(t)$, sous une température $T(t)$ s'écrit, après un temps d'irradiation égal à t :

$$(3) \quad \varepsilon(t) = F \left(t, \{\varphi(t')\}_0^t, [\sigma(t')]_0^t, [T(t')]_0^t \right)$$

la notation $F(\{f(t')\}_0^t)$ indique qu'il s'agit de fonctionnelle et non de fonction.

Dans la relation (3), on tient compte de toutes les valeurs prises par les fonctions $\varphi(t')$, $\sigma(t')$, $T(t')$, quand t' varie de l'instant initial à l'instant t ; on tient ainsi compte de l'histoire du flux de neutrons de la contrainte et de celle de la température pendant toute l'irradiation.

Mais ces considérations sur les mécanismes responsables des déformations dues à l'irradiation, nous ont montré au début du chapitre, que finalement l'effet de l'irradiation dépend du nombre de neutrons reçus, autrement dit la dose γ et non du temps d'exposition t et du flux φ séparément.

Si $\varphi(t') > 0$, on a :

$$\gamma(t) = \int_0^t \varphi(t') dt'$$

$\gamma(t)$ est une fonction monotone croissante de t .

on peut définir t en fonction de γ :

$$t = g(\gamma).$$

La relation (3) s'écrit :

$$\varepsilon = F(\gamma, [\sigma(\gamma')]^\gamma, [\tau(\gamma')]^\gamma)$$

on étudie ainsi les variations des fonctions non plus en fonction du temps, mais en fonction de la dose. On parlera alors d'"histoire" de la température ou de la contrainte en fonction de la dose.

Comme les déformations restent petites de 3 à 4%, on admet en première approximation, si la température est constante, (ce qui sera souvent le cas) :

$$(4) \quad \varepsilon(\gamma) = \varepsilon^e(\sigma) + W(\gamma) + f(\gamma, [\sigma(\gamma')]^\gamma)$$

le premier terme du 2ème membre $\varepsilon(\sigma)$ est identifié à la déformation élastique, $W(\gamma)$ à la déformation de Wigner dû à l'irradiation seule. Le terme $f(\gamma, [\sigma(\gamma')]^\gamma)$ est appelé déformation de fluage et est le seul qui retienne l'histoire des contraintes.

En raison de la complexité du cas général, la plupart des expérimentateurs ont essayé de vérifier la relation (4) et de déterminer $f(\gamma, [\sigma(\gamma')]^\gamma)$. Certains d'entre eux ont étudié l'influence de la température d'une façon paramétrique sur la relation (4), négligeant ainsi tout effet de l'histoire de la température.

Les résultats les plus complets d'irradiation de graphite sous contrainte sont dûs à PERKS et SIMMONS en Grande-Bretagne et à KENNEDY aux Etats-Unis.

- a) Résultats de SIMMONS et PERKS .

Dans la première série d'expérience (1963) sur des éprouvettes sous contrainte constante, SIMMONS et PERKS (20) avaient pour but d'établir l'existence du fluage d'irradiation. Ces auteurs ont mesuré séparément tous les termes de déformation qu'ils ont pu isoler :

- ils ont évalué la déformation élastique et le module d'élasticité avant et après irradiation en soumettant les échantillons à des cycles charges-décharges ;

- ils ont irradié des échantillons témoins non chargés, pour relever la déformation Wigner libre;

- ils ont enfin observé le fluage thermique du même matériau hors rayonnement.

Le terme de fluage f a été obtenue à partir d'une mesure globale de la déformation totale :

$$\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon + f + W$$

où ϵ_0 et ϵ sont les déformations élastiques avant et après irradiation. Le diagramme contrainte-déformation de la figure (6) permet de suivre la décomposition de la déformation. Ces expériences ont permis aussi de décrire le fluage d'irradiation : il se compose d'une partie à vitesse décroissante par rapport à la dose appelée fluage transitoire et d'une partie à vitesse constante appelée fluage secondaire.

Une deuxième série d'expériences (1965) sur des éprouvettes^{en} contraction contrariée permet à SIMMONS et PERKS (21) de confirmer leurs premiers résultats de tirer les conclusions suivantes :

1°) - les déformations de fluage peuvent être très importantes, et peuvent atteindre 3% ;

2°) - Pour une contrainte constante le fluage secondaire peut s'écrire :

$$f = K \sigma \gamma$$

où γ est la dose de neutrons reçus ; K est appelé coefficient de fluage. La relation $f = K \sigma \gamma$ a été obtenue pour

$\sigma = \text{Cte}$, ce qui fait disparaître la formulation à l'aide de la

AMME CONTRAINTE-DEFORMATION POUR UN ECHANTILLON IRRADIE A CHARGE
TANTE (d'après PERKS et SIMMONS, 1963.)

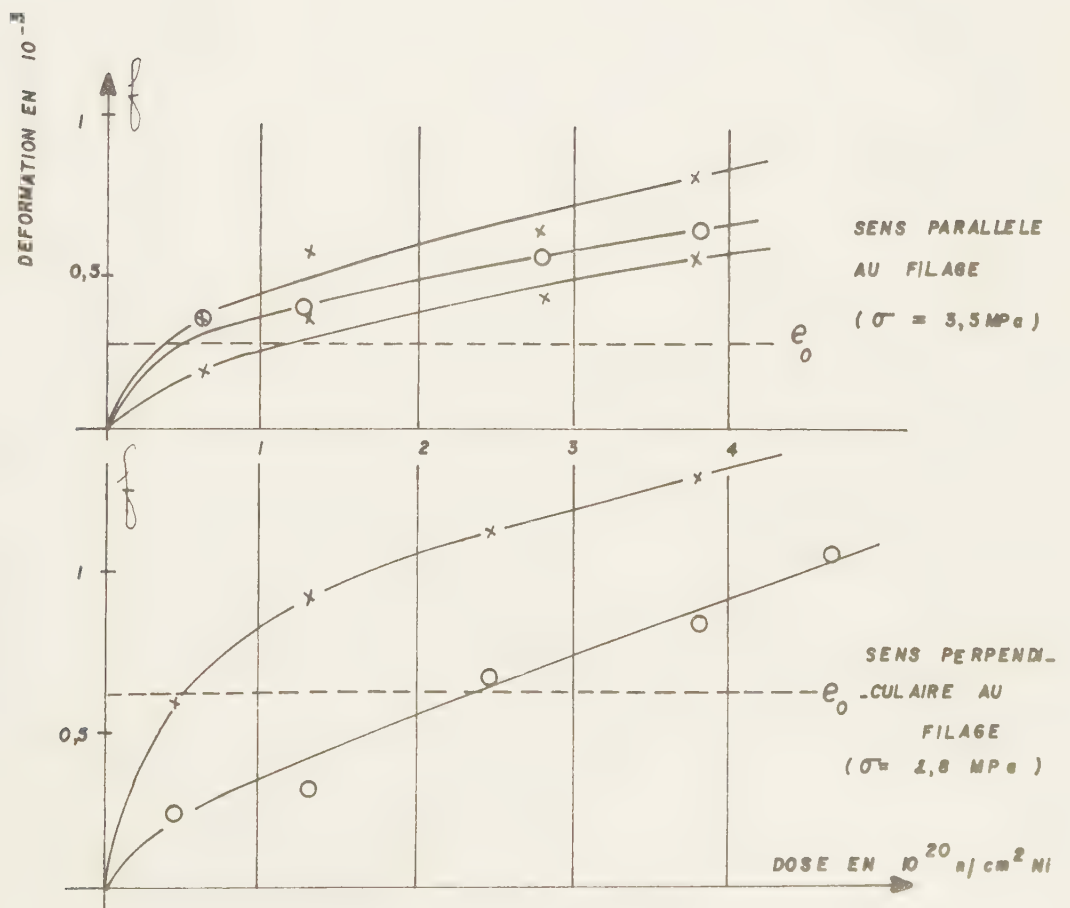
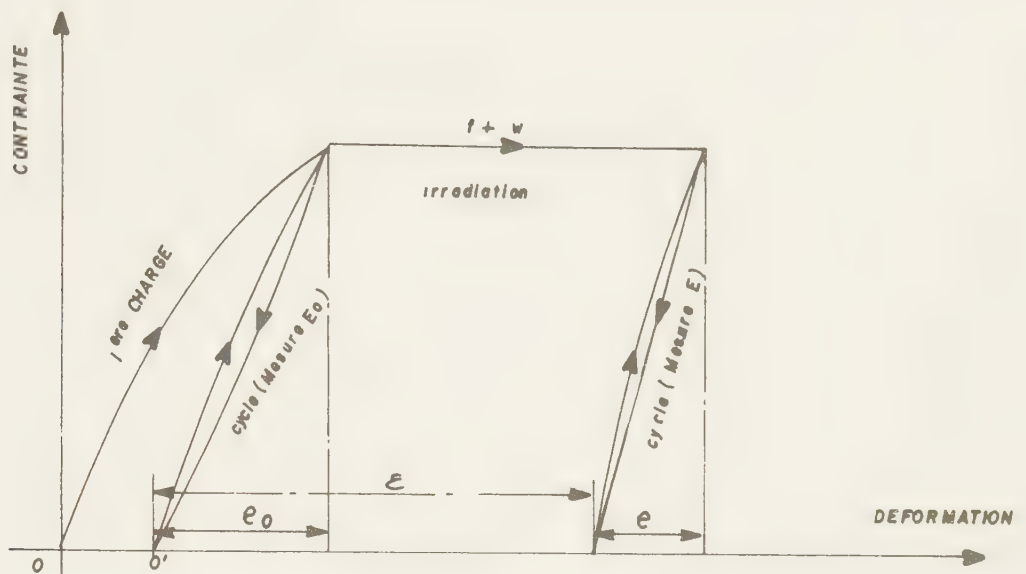


Figure : 6

FLUAGE D'IRRADIATION
— d'après PERKS et SIMMONS, 1963 —

fonctionnelle, elle constitue néanmoins une vérification des résultats obtenus par KENNEDY, rappelés ci-dessous.

3°) - Le fluage primaire est réversible.

- b) Résultats de KENNEDY.

KENNEDY (12) et son équipe d'Oak Ridge National Laboratory ont étudié sur une éprouvette encastrée à une extrémité et chargée à l'autre, l'évolution de la flèche en fonction de la dose de neutrons. En opérant dans un flux uniforme, les déformations Wigner ne donnent pas de déformation de flexion. La flèche enregistrée est due uniquement à la déformation élastique et à la déformation de fluage.

Cette expérience fournit avec précision la déformation totale, mais a l'inconvénient de ne ^{pas} s'effectuer sous contrainte uniforme, ce qui en complique l'interprétation. Les résultats de KENNEDY confirment ceux de SIMMONS et PERKS sur l'existence d'un fluage transitoire suivi d'un fluage secondaire, voir fig.(7), et donnent pour le fluage secondaire la loi suivante :

$$\frac{C}{\sigma} = K \dot{\epsilon} .$$

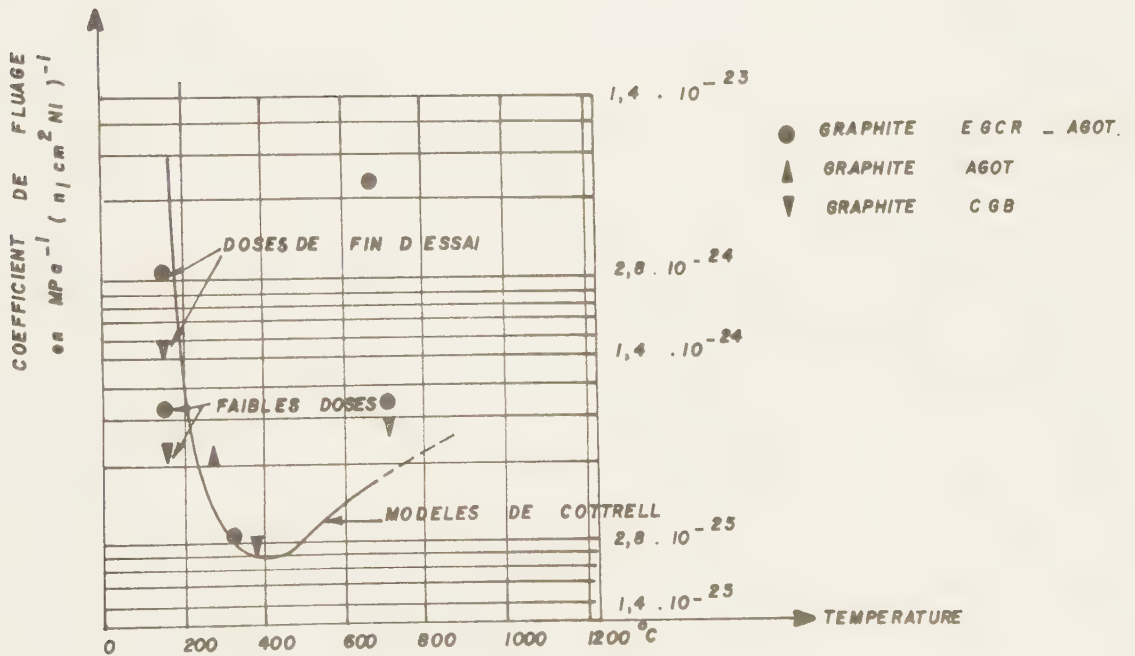
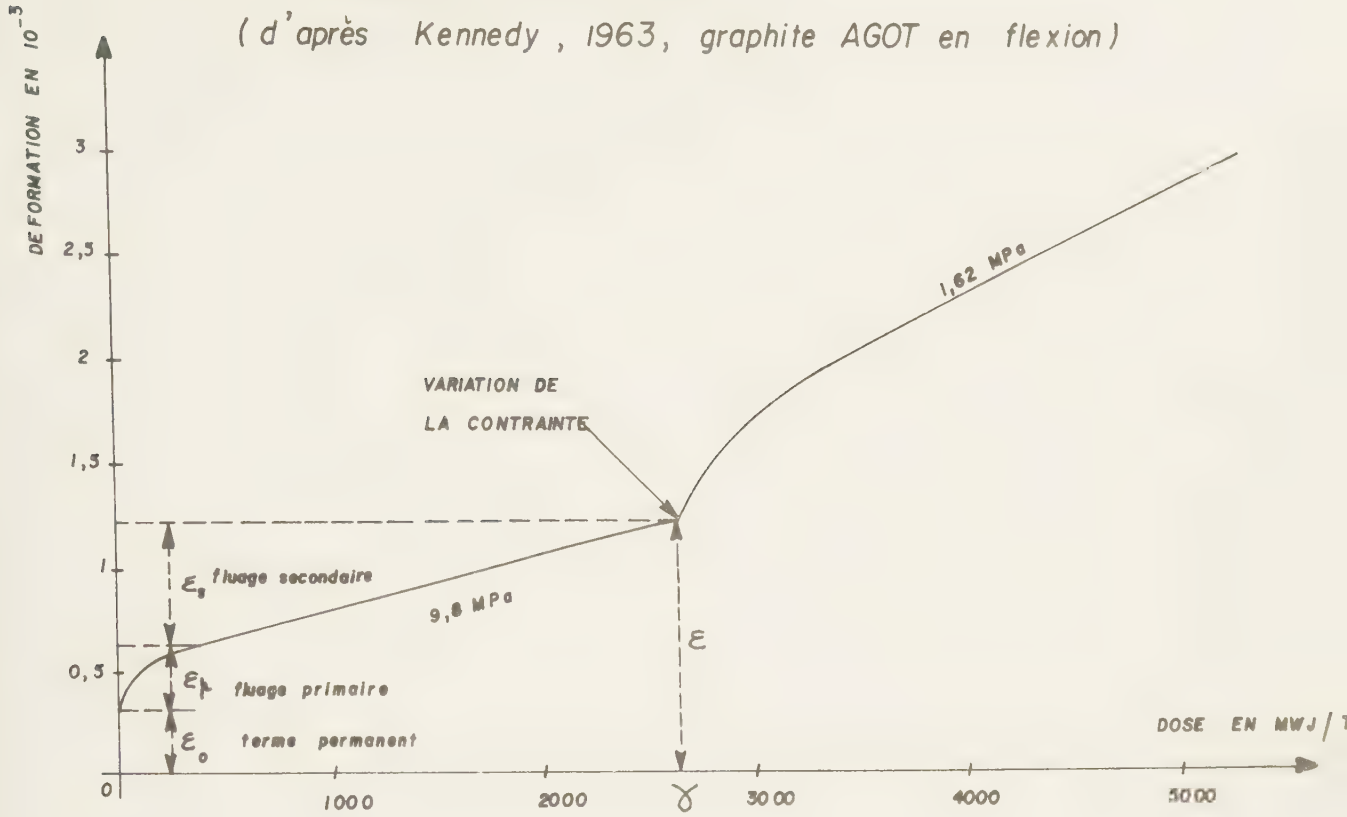
Le coefficient de fluage K dépend fortement de la température voir figure (7) .

- c) Autres résultats.

Quelques expériences françaises ont confirmé qualitativement les résultats connus sur le fluage d'irradiation. Pour le graphite français, on dispose d'un coefficient de fluage secondaire déterminé lors d'une expérience de compression simple dans la pile SILOE $K = 3 \cdot 10^{-8} \text{ MPa}^{-1} \text{ MW J}^{-1} \text{ } ^\circ\text{A}^{-1}$ cf : rapport C.E.A. DPL/PCA/PEI/70/728.

FLUAGE DU GRAPHITE

(d'après Kennedy , 1963, graphite AGOT en flexion)



VARIATION DU COEFFICIENT DE FLUAGE AVEC
LA TEMPERATURE , d'après Kennedy , 1966 -

Figure. 7

D'autres travaux, (7), (9) sont venus confirmer tous les résultats connus sur le fluage d'irradiation. On peut résumer par les conclusions suivantes les résultats des expériences du graphite sous irradiation et contrainte.

- La déformation totale du graphite sous irradiation et contrainte peut s'écrire :

$$\varepsilon^t = \varepsilon^e + w + f + \alpha T$$

ε^t est la somme des déformations élastiques, Wigner, thermique, et de fluage.

- La déformation de fluage est une fonction linéaire de la contrainte. Elle se compose d'une partie à vitesse décroissante par rapport à la dose appelée fluage transitoire. Cette déformation est à peu près réversible et est de l'ordre de la déformation élastique.

- le fluage transitoire est suivi d'une déformation à vitesse constante par rapport à la dose ; c'est le fluage secondaire, il n'est pas réversible, et admet la loi suivante :

$$\frac{df}{d\gamma} = K \sigma .$$

Ce fluage d'irradiation a les caractéristiques d'un fluage visqueux. Une particularité importante de ce fluage est que l'évolution est fonction de la dose γ et non du temps réel t . Ceci fait entrevoir une analogie avec les corps visco-élastiques thermorhéologiquement simples. Ces matériaux peuvent admettre comme variable d'évolution une fonction du temps et non le temps réel. On rappelle dans le paragraphe qui suit, la théorie de la thermoviscoélasticité des corps rhéologiquement simples avant de justifier dans le chapitre II, l'analogie que ces matériaux possèdent avec le comportement du graphite sous irradiation et contrainte.

I.3 - RAPPEL DE LA THEORIE DE LA THERMOVISCOELASTICITE.

I.3.1 - Viscoélasticité linéaire sous température uniforme.

La présentation la plus générale des lois de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire, homogène et isotrope est la formulation intégrale:

$$S_{ij}(x, t) = \int_0^t G_1(t, t') \frac{\partial}{\partial t'} e_{ij}(x, t') dt' \quad (5)$$

$$\sigma(x, t) = \int_0^t G_2(t, t') \frac{\partial}{\partial t'} \varepsilon(x, t') dt'$$

et les relations inverses :

$$e_{ij}(x, t) = \int_0^t J_1(t, t') \frac{\partial S_{ij}(x, t')}{\partial t'} dt' \quad (6)$$

$$\varepsilon(x, t) = \int_0^t J_2(t, t') \frac{\partial \sigma}{\partial t'}(x, t') dt'$$

S_{ij} et e_{ij} sont respectivement les déviateurs des tenseurs de contraintes et de déformation et σ et ε en sont leur partie sphérique : (on fait la convention de sommation des indices répétés)

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} ; e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\sigma = \sigma_{kk}$$

$$; \varepsilon = \varepsilon_{kk}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

$G_1(t, t')$; $G_2(t, t')$; $J_1(t, t')$; $J_2(t, t')$ sont respectivement les fonctions de relaxation et de fluage du matériau. Ces fonctions dépendent indépendamment du temps d'observation de l'effet et du temps t' d'application de la cause. On dit que les propriétés d'un tel matériau dépendent de l'âge ou que le matériau est vieillissant.

Cas des matériaux non-vieillissants :

Si les propriétés du matériau ne varient pas du cours du temps le matériau est non-vieillissant, la fonction $G_1(t, t')$; $G_2(t, t')$; $J_1(t, t')$; $J_2(t, t')$ subissent une translation le long de t quand t' varie, on a donc :

$$G_{\alpha}(t, t') = G_{\alpha}(t - t')$$

$$\alpha = 1, 2$$

$$J_{\alpha}(t, t') = J_{\alpha}(t - t')$$

Seul intervient la différence de temps qui sépare l'application de la cause de l'observation de son effet.

Généralement en viscoélasticité classique ^{on} suppose cette propriété vérifiée.

Une autre formulation de la loi de comportement des corps viscoélastiques non-vieillissant est donnée par une représentation différentielle :

$$(7) \quad P_1(D) \times S_{ij}(x, t) = Q_1(D) e_{ij}(x, t)$$

$$P_2(D) \times \sigma(x, t) = Q_2(D) \varepsilon(x, t) .$$

$$\text{où : } D = \frac{\partial}{\partial t} ; \quad P_{\beta} = \sum_{n=0}^{NB} P_{\beta}^n D^n ; \quad Q_{\beta} = \sum_n^{MB} q_{\beta}^n D^n ; \quad \beta = 1, 2$$

P et Q sont des polynômes d'opérateurs différentiels le comportement du matériau est entièrement déterminé par les constantes P_{β} , Q_{β} . La suite des constantes P_{β} , Q_{β} est appelée spectre du matériau.

La liaison entre la représentation intégrale et différentielle est obtenue à l'aide de la transformation de Carson . Soit $F(x, t)$ une fonction des coordonnées x et du temps t défini $t \geq 0$. On appelle transformée de Carson de la fonction $F(x, t)$, la fonction $F^*(x, \eta)$ définie par :

$$F^*(x, \eta) = \eta \int_0^\infty F(x, t) \exp(-\eta t) dt$$

η est le paramètre de la transformation, il est réel ou complexe. En appliquant la transformation de Carson aux équations (5) et (7) et en utilisant le théorème sur les transformées d'un produit de convolution, on obtient pour les relations (5) :

$$\begin{aligned} S_{ij}^*(x, \eta) &= G_1^*(\eta) e_{ij}^*(x, \eta) \\ \sigma^*(x, \eta) &= G_2^*(\eta) \varepsilon^*(x, \eta) \end{aligned} \quad (8)$$

et les relations (7) donnent :

$$\begin{aligned} P_1^*(\eta) S_{ij}^*(x, \eta) &= Q_1^*(\eta) e_{ij}^*(x, \eta) \\ P_2^*(\eta) \sigma^*(x, \eta) &= Q_2^*(\eta) \varepsilon^*(x, \eta). \end{aligned} \quad (9)$$

les considérations thermodynamiques (15), permettent d'établir que les polynômes $P(\eta)$ et $Q(\eta)$ sont de même degré, à moins que le degré M du polynôme $P(\eta)$ dépassent d'une unité le degré N du polynôme $Q(\eta')$; (dans ce cas, il n'y a pas d'élasticité instantanée). Les racines de ces polynômes doivent être toutes simples réelles et négatives (sauf l'une de celles de $P(s)$ qui peut être nulle si l'on a affaire à un liquide). De plus, les racines $-\mu$ de $Q(s)$ doivent s'intercaler entre les racines $-\lambda_1$ du polynôme $P(\eta)$, on a donc :

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 \dots$$

I.3.2 - Influence de la température. Corps thermo-rhéologiquement simple.

L'effet de la température se traduit non seulement par une dilatation thermique, mais aussi par d'importantes modifications des propriétés du matériau. Généralement une augmentation de la température entraîne un accroissement de vitesses de fluage. Les hauts polymères qui sont viscoélastiques admettent une propriété assez simple quand il sont soumis à des changements de température : cette propriété se traduit ^{vis} sur un graphique - Module relaxation en fonction du logarithme népérien du temps-: Le module fonction de relaxation $G(t)$ à une température T s'obtient par une translation $\psi(\tau)$ parallèle à l'axe $\log t$ à partir de la courbe $G_{T_0}(t)$. $\psi(\tau)$ est appelé fonction de décalage et est la même pour tous les modules fonctions de relaxation et de fluage du matériau.

Cette relation d'équivalence temps-température a été introduite par LEADERMAN (30). Les matériaux admettant une telle propriété ont été appelés par SCHWARZL et STAVERMAN (27) : Corps visco-élastiques thermorhéologiquement simples.

Soit $G_1(t)$ et $G_2(t)$ les modules de relaxation de cisaillement et de compression simple à une température T_0 .

On pose :

$$G_1(t, T_0) = L_1(\log t)$$

$$G_2(t, T_0) = L_2(\log t)$$

Pour une température T différente de T_0 , la relation d'équivalence se traduit par :

$$G_1(t, T) = L_1(\log t + \psi(T))$$

$$G_2(t, T) = L_2(\log t + \psi(T))$$

la fonction $\psi(T)$ obéit aux conditions suivantes :

$$\psi(T_0) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} > 0$$

en posant :

$$\psi(T) = \log \Psi(T)$$

on peut écrire :

$$G_1(t, T) = G_1(\xi)$$

$$d G_2(t, T) = G_2(\xi)$$

où : $\xi = t\varphi(T)$ est appelé temps réduit ou pseudo-temps.
 Quand T est une fonction des coordonnées x et du temps t .
 MORLAND et LEE (18) définissent le temps réduit par :

$$(11) \quad \xi(x, t) = \int_0^t \varphi(T(x, t')) dt'$$

et arrivent ainsi à généraliser les lois de relaxation d'un matériau viscoélastique rhéologiquement simple :

$$(12) \quad \begin{aligned} S_{ij}(x, t) &= \int_0^t G_1(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} e_{ij}(x, t') dt' \\ \sigma(x, t) &= \int_0^t G_2(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} [\varepsilon(x, t') - \alpha_0 \Theta(x, t')] dt' \end{aligned}$$

$\alpha_0 \Theta(x, t)$ est la dilatation thermique tenant compte de la variation du coefficient de dilatation thermique α avec la température :

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{T_0}^{T(x, t)} \alpha(T') dT'$$

Des considérations analogues permettent d'obtenir les lois de fluage :

$$(13) \quad \begin{aligned} e_{ij}(x, t) &= \int_0^t J_1(\xi - \xi') \frac{\partial S_{ij}}{\partial t'}(x, t') dt' \\ \varepsilon(x, t) - \alpha_0 \Theta(x, t) &= \int_0^t J_2(\xi - \xi') \frac{\partial \sigma}{\partial t'}(x, t') dt' \end{aligned}$$

Ces relations (12) et (13) ne sont pas du type produit de convolution, et la transformation de Carson ne donnera pas de relations analogues à celles de l'élasticité.

En notant que $\xi(x, t)$ est une fonction monotone croissante du temps t on peut définir $t = g(x, \xi)$. Il est possible d'effectuer un changement de variable dans les relations (12) et (13) et d'obtenir ces relations en fonction de x et ξ . Pour éviter les confusions, on adopte la notation suivante : Soit $F(x, t)$ une fonction de x et t , on écrira :

$$(14) \quad F(x, t) = \hat{F}(x, \xi) = F(x, g(x, \xi))$$

et on distinguera bien $\hat{F}(x, \xi)$ de $F(x, \xi)$.

$F(x, \xi)$ est la même fonction que $F(x, t)$ on a remplacé littéralement t par ξ .

Avec les notations (14), les relations (12) s'écrivent :

$$(15) \quad \begin{aligned} \hat{S}_{ij}(x, \xi) &= \int_0^\xi \hat{G}_1(\xi - \xi') \frac{\partial \hat{e}_{ij}}{\partial \xi'}(x, \xi') d\xi' \\ \hat{\sigma}(x, \xi) &= \int_0^\xi \hat{G}_2(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial \xi'} [\hat{\varepsilon}(x, \xi') - \alpha_0 \hat{\theta}(x, \xi')] d\xi' \end{aligned}$$

et en relation (15) deviennent :

$$(16) \quad \begin{aligned} \hat{S}_{ij}(x, \xi) &= \int_0^\xi \hat{G}_1(\xi - \xi') \frac{\partial \hat{e}_{ij}}{\partial \xi'}(x, \xi') d\xi' \\ \hat{\sigma}(x, \xi) &= \int_0^\xi \hat{G}_2(\xi - \xi') \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \xi'}(x, \xi') d\xi' \end{aligned}$$

Dans les relations (15) et (16) apparaissent les produits de convolution, la transformation de Carson par rapport à ξ et de paramètre q permet de retrouver des relations formellement analogues à celles de l'élasticité :

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{S}_{ij}^*(x, q) &= \hat{G}_1^*(q) \hat{e}_{ij}^*(x, q) \\ \hat{\sigma}^*(x, q) &= \hat{G}_2^*(q) [\hat{\varepsilon}^*(x, q) - q_0 \hat{\theta}^*(x, q)] \end{aligned}$$

On obtient aussi des relations inverses à l'aide de $J_1(\xi)$ et $J_2(\xi)$.

La résolution d'un problème avec les variables x et ξ exige que l'on écrive les équations d'équilibre et compatibilités avec les mêmes coordonnées que la loi de comportement.

Les équations d'équilibre qui s'écrivent en fonction de x et t :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x,t) + f_i(x,t) = 0$$

deviennent en fonction de x et ξ :

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}(x,\xi) + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial \xi}(x,\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \hat{f}_i(x,\xi) = 0$$

Les conditions de compatibilité sont aussi modifiées, ainsi que les relations donnant les déformations à partir des déplacements.

Dans le cas général, on ne retrouve pas l'analogie élastique ni avec les coordonnées (x,t) , ni avec (x,ξ) . On montrera au dernier chapitre les simplifications qui ont permis d'obtenir quelques solutions particulières.

CHAPITRE II

LOI DE COMPORTEMENT DU GRAPHITE.

II.1 - HYPOTHESES DE GENERALISATION.

Les travaux expérimentaux de KENNEDY, PERKS et SIMMONS, JENKINS et STEPHEN, etc., nous ont apporté un certain nombre d'indications, descriptives et quantitatives sur l'effet de l'irradiation, sur comportement mécanique du graphite. Pour formuler une loi de comportement tridimensionnelle à partir des résultats expérimentaux exposés au chapitre précédent, nous adopterons un certain nombre d'hypothèses qui généralisent celles qui ont été vérifiées ou admises dans le cas unidimensionnel. Ces hypothèses sont les suivantes :

1°) Pour un élément de graphite sous irradiation, température et contrainte, le tenseur de déformation total est la somme du tenseur de déformation élastique, du tenseur de déformation Wigner dûe à l'irradiation seule, du tenseur de déformation thermique et enfin d'un tenseur de déformation différé dû à l'effet combiné de l'irradiation et de la contrainte.

$$\varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^e(\sigma_{ke}) + W_{ij}(\gamma, T) + \alpha_{ij} T + f_{ij}[\sigma_{ke}, \gamma]$$

2°) Les déformations élastiques du graphite sont supposées parfaitement linéaires par rapport aux contraintes. Les modules élastiques peuvent dépendre de la dose γ .

3°) Les déformations Wigner $W(\gamma, T)$ qui dépendent de la dose et de l'histoire de la température sont supposées connues, soit à partir de résultats expérimentaux, soit à partir d'une théorie physique. Il en est de même des déformations thermiques.

4°) La déformation de fluage ^{est} une fonctionnelle linéaire du tenseur des contraintes et ^{de} son histoire en fonction de la dose.

5°) Pour les quatre composantes de la déformation la loi de comportement admet les mêmes propriétés de symétrie que le matériau.

II.2 - VISCOELASTICITE D'IRRADIATION.

II.2.1 - Formulation intégrale de la loi de comportement.

Négligeons pour le moment les déformations thermiques et les effets de la température sur le comportement du graphite.

-a) Loi unidimensionnelle.

Si on irradie une éprouvette en graphite soumise à une contrainte uniaxiale $\sigma(0)$ maintenue constante, sa déformation ϵ en fonction de la dose s'écrit en vertu des hypothèses 1, 2, 3, 4, du paragraphe précédent :

$$17 \text{ b} \quad \epsilon(\gamma) = W(\gamma) + J(0) \cdot \sigma(0) + \sigma(0) f(\gamma)$$

$\sigma(0) J(0)$ est la déformation élastique et $W(\gamma)$ la déformation Wigner. Par définition $f(0) = 0$, on peut donc regrouper les termes de déformation élastique et de fluage et la relation (17 b) s'écrit :

$$\epsilon(\gamma) - W(\gamma) = \sigma(0) J(\gamma)$$

Si maintenant on applique une contrainte $\sigma(\gamma)$ variant pendant l'irradiation, l'hypothèse (4) permet d'écrire :

$$17 \text{ c} \quad \epsilon^t(\gamma) - W(\gamma) = \sigma(0) J(0) + \int_0^\gamma J(\gamma - \gamma') \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma'}(\gamma') d\gamma'$$

Après le changement de variable défini par $\gamma - \gamma' = u$,
la relation (17 c) s'écrit :

$$(18) \quad \varepsilon^t(\gamma) - w(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \int_0^\gamma \sigma(\gamma - u) J(u) du$$

$J(\gamma)$ est appelé fonction de fluage du matériau.

De la même façon, si la déformation totale
de l'éprouvette est imposée variable le long de l'irradiation,
la contrainte s'écrit :

$$(19) \quad \sigma(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \int_0^\gamma [\varepsilon^t(\gamma - u) - w(\gamma - u)] G(u) du$$

$G(\gamma)$ est appelé fonction de relaxation.

-b) Loi tridimensionnelle.

Le passage de la loi unidimensionnelle à la loi tri-
dimensionnelle se fait en remplaçant les grandeurs scalaires par
les tenseurs correspondants. Pour un matériau anisotrope, on
obtient (on fait la convention de sommation des indices répétés) :

$$(20) \quad \varepsilon_{ij}(x, \gamma) - w_{ij}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^\gamma J_{ijk} e(u) \sigma_{ke}(x, \gamma - u) du$$

et la relation (19) devient :

$$(21) \quad \sigma_{ij}(x, \gamma) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^\gamma G_{ijk} e(u) [\varepsilon_{kl}^t(x, \gamma - u) - w_{kl}(\gamma - u)] du$$

$J_{ijk} e(\gamma)$ et $G_{ijk} e(\gamma)$ sont des tenseurs du 4ème ordre
et définissent respectivement les lois de fluage et de relaxation
du matériau.

On admettra comme on le fait d'habitude que le principe d'ONSAGER reste valable, les tenseurs J_{ijke} et G_{ijke} possèdent alors les symétries suivantes :

$$J_{ijke} = J_{jike} = J_{ijek} = J_{keij}$$

$$G_{ijke} = G_{jike} = G_{ijek} = G_{keij}$$

D'après l'hypothèse (5) les tenseurs G_{ijke} et J_{ijke} doivent avoir les mêmes propriétés de symétrie que le matériau. Pour un graphite isotrope deux fonctions $\hat{E}(\gamma)$ et $\hat{\nu}(\gamma)$ suffisent à déterminer entièrement ces tenseurs . Pour un graphite à symétrie transversale, il faut cinq fonctions qu'on note : $\overline{E}_p(\gamma)$, $\overline{E}_t(\gamma)$, $\overline{G}_p(\gamma)$, $\overline{G}_t(\gamma)$, $\overline{J}_1(\gamma)$ par analogie a x notations consacrées élasticité.

II.2.2 - Autre présentation de la loi de comportement.

La transformation de Carson de variable γ et de paramètre q , permet de retrouver comme pour la viscoélasticité classique, des lois formellement analogues à celles de l'élasticité. Les relations (20) deviennent en appliquant le théorème de transformation d'un produit de convolution : (on omet l'astérisque pour simplifier les notations) :

$$(22) \quad \varepsilon_{ij}(x, q) - w_{ij}(q) = J_{ijke}(q) \sigma_{ke}(x, q)$$

et les relations (21) deviennent :

$$(23) \quad \sigma_{ij}(x, q) = G_{ijke}(q) [\varepsilon_{ke}(x, q) - w_{ke}(q)]$$

Les relations de comportement peuvent aussi s'écrire en fonction des coordonnées x et du temps réel t . En effet la dose de neutrons γ qui s'écrit :

$$\gamma(x, t) = \int_0^t \phi(x, t') dt'$$

est une fonction monotone croissante si le flux est différent de zéro; condition qui est toujours vérifiée si le temps réel est remplacé par le temps d'exposition ou de fonctionnement. On peut alors définir la fonction inverse t en fonction de γ et x

$$t = g(x, \gamma)$$

et on a :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \phi(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial \gamma} = \frac{\partial g}{\partial \gamma} = \frac{1}{\phi(x, t)}$$

En effectuant le changement de variable défini par $t = g(x, \gamma)$ les relations de comportement deviennent en fonction de x et t :

$$\epsilon_{ij}(x, t) - w_{ij}[\gamma(x, t)] = \int_0^t J_{ijke} [\gamma(x, t) - \gamma(x, t')] \frac{\partial \sigma_{ke}(x, t')}{\partial t'} dt'$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = \int_0^t G_{ijke} [\gamma(x, t) - \gamma(x, t')] \frac{\partial}{\partial t'} [\epsilon_{ke}(x, t') - w_{ke}(\gamma(x, t'))] dt'$$

Ces relations ne sont pas du type produit de convolution et la transformation de Carson ne permettrait pas de retrouver des relations analogues à celles de l'élasticité. Dans le cas particulier où le flux est indépendant du temps, la transformation de Carson permet de trouver ces relations; ce dernier cas sera discuté au §4 de ce chapitre.

II.2.3 - Généralisation de la notion de corps viscoélastique thermo-rhéologiquement simple.

Les relations de comportement (20) du graphite sous irradiation sont donc formellement analogues à celles d'un matériau rhéologiquement simple tel qu'il a été défini par STAVERMAN et SCHWARZL (27). La dose γ remplace le temps réduit τ défini par ces auteurs.

Il est utile de généraliser la notion de corps thermo-rhéologiquement simple à tout matériau dont le comportement suit la loi viscoélastique classique dans laquelle le temps réel est remplacé par un temps réduit τ . La définition de ce temps réduit traduirait une relation d'équivalence entre le temps réel et un autre paramètre physique tel que la température, le flux de neutrons, le taux d'humidité, etc.

Cette généralisation permet d'appliquer aux graphites sous irradiation les travaux importants consacrés aux corps thermo-rhéologiquement simples (17), (18), (26), (31).

II.3 INFLUENCE DE LA TEMPERATURE.

Quand l'irradiation du graphite n'est pas isotherme, ce qui est souvent le cas dans un réacteur nucléaire, la température provoque en plus des déformations thermiques d'importantes modifications des coefficients définissant le comportement du matériau. On sait que les déformations Wigner dépendent fortement de la température surtout aux fortes doses de neutrons (voir (22) et (25)). Il en est de même des déformations de fluage; KENNEDY (12) ainsi que JENKINS et STEPHEN (10) ont noté une influence importante de la température sur le coefficient de fluage. Les coefficients élastiques et de dilatation thermique dépendent aussi de la dose de neutrons et de la température. Le comportement réel du graphite, sous irradiation, est donc très complexe; et tenir compte de toutes les variations à la fois rendrait le problème inextricable.

Dans cette étude, on admet que l'effet neutronique est fondamental; la température intervenant comme paramètre pour la raison suivante :

Lors du fonctionnement d'un réacteur, l'écoulement permanent des gaz calorifiques finit par établir très rapidement en quelques jours, ou quelques semaines, des températures variables en chaque point du réacteur mais indépendantes du temps. C'est seulement pendant les phases d'arrêt ou de démarrage, que les températures sont fonctions du temps. On peut généralement négliger ces phases d'arrêt et de démarrage vis-à-vis des longues périodes d'un ou deux ans au moins de fonctionnement continu du réacteur. Les cas des températures stationnaires et variables sont à examiner séparément :

II.3.1 - Température stationnaire.

Dans les calculs de contrainte dans les éléments de réacteurs on peut souvent faire légitimement l'hypothèse d'une température stationnaire $T = T(x_1, x_2, x_3)$. On néglige ainsi les effets transitoires de la température.

La relation de comportement tenant compte de la variation des déformations Wigner et des coefficients de dilatation thermique en fonction de la température, serait en fonction de x et γ :

$$\varepsilon_{ij}(x, \gamma) - w_{ij} [T(x), \gamma] - \alpha_{ij} T(x) = \int_0^\gamma J_{ijkl} [T(x), \gamma - \gamma'] \frac{\partial \sigma_{kl}(x, \gamma')}{\partial \gamma'} d\gamma'$$

et en fonction de x et t :

$$\varepsilon_{ij}(x, t) - w_{ij} (T(x), \gamma(x, t)) - \alpha_{ij} T(x) = \int_0^\gamma J_{ijkl} (T(x), \gamma(x, t) - \gamma(x, t')) \frac{\partial \sigma_{kl}(x, t')}{\partial t'} dt'$$

II.3.2 - Température variable .

Pendant les phases d'arrêt et de démarrage d'un réacteur, la température est une fonction du temps : $T = T(x, t)$; elle peut varier en effet de 80° à 1200° ou inversement en quelques jours ou

en quelques semaines. Si on tient compte en plus d'un coefficient de dilatation thermique généralement fonction de la dose γ et de la température, la relation de comportement serait en fonction de x et du temps t :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x, t) &= \int_0^t \frac{\partial w_{ij}}{\partial t'} [T(x, t'), \gamma(x, t')] dt' - \int_0^t x_{ij} [\gamma(x, t'), T(x, t')] \frac{\partial T(x, t')}{\partial t'} dt' \\ &= \int_0^t J_{ijke} [T(x, \gamma(x, \gamma(x, t) - \gamma(x, t'))), \gamma(x, t) - \gamma(x, t')] \frac{\partial \gamma(x, t')}{\partial t'} dt' \end{aligned}$$

Dans le cas général, si on veut tenir compte des variations de tous les paramètres, d'ailleurs peu connus expérimentalement, la loi de comportement devient très complexe. Dans la pratique, on remplace les fonctions réelles de la température par des fonctions constantes pendant le fonctionnement et nulles pendant les arrêts du réacteur. Les fonctions Heavyside représentent bien ce type de variation. A titre d'exemple, on traitera au chapitre III, le problème du mur infini représentant un réflecteur d'un réacteur soumis des températures cycliques.

II.4 - EQUATIONS GENERALES DE LA VISCOELASTICITE D'IRRADIATION.

Pour résoudre un problème de viscoélasticité d'irradiation, il faut écrire, en plus des relations de comportement, les équations d'équilibres et les conditions de compatibilité. Ces équations peuvent s'écrire, soit en fonction de x et de γ , soit en fonction de x et du temps t .

II.4.1 - Equations en fonction de x et de γ .

Les relations de comportement sont données par (20). Elles peuvent s'écrire :

$$\varepsilon_{ij}(x, \gamma) - w_{ij}(\gamma) = \int_0^\gamma J_{ijke} (\gamma - \gamma') \frac{\partial w_{ke}(x, \gamma')}{\partial \gamma'} d\gamma'$$

et sous forme transformée de Carson :

$$\Sigma_{ij}(x, q) - w_{ij}(q) = J_{ijke}(q) \tau_{ke}(x, q)$$

Les équations d'équilibre qui s'écrivent en fonction de x et de t :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} (x, t) + f_i(x, t) = 0$$

deviennent en fonction de x et de γ :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} (x, \gamma) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \gamma} (x, \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} + f_i(x, \gamma) = 0$$

Le cas particulier de flux constant entraîne $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$ et on est ramené à la viscoélasticité classique.

Les conditions de compatibilité en fonction de x et γ sont modifiées. Il y apparaît les termes de dérivées premières et secondes par rapport à γ .

Quant aux relations donnant les déformations en fonction des déplacements, elle devient en fonction de x et de γ :

$$\varepsilon_{ij}(x, \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x, \gamma)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, \gamma)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x, \gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, \gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial x_i} \right)$$

Si l'utilisation des variables x, γ permet de retrouver des relations de comportement identiques à celles de l'élasticité sous forme transformée, en revanche, les équations d'équilibre, les relations de compatibilité et la définition des déformations sont modifiées. On ne peut plus utiliser l'analogie élastique. C'est pourquoi cette représentation en fonction de x et γ sera peu utilisée.

II.4.2 - Equations en fonctions de x et t .

On a vu qu'à l'aide du chargement de variables défini par :

$$\gamma(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t') dt'$$

et

$$t = g(x, \gamma)$$

les relations de comportements peuvent s'écrire :

$$\Sigma_{ij}(x, t) - W_{ij}[\gamma(x, t)] = \int_0^t J_{ijke} [\gamma(x, t) - \gamma(x, t')] \frac{\partial J_{ke}}{\partial t'}(x, t') dt'$$

Sous cette forme, la transformation de Carson ne permettrait pas de retrouver des relations analogues à celles de l'élasticité. Néanmoins cette représentation en fonction de x et de t sera préférée à la précédente, car elle a l'avantage de conserver telles quelles les équations classiques de la mécanique.

II.5 - ETUDE DES CAS PARTICULIERS EN VUE DES APPLICATIONS.

Afin d'être en mesure de faire des applications, on se propose d'étudier toutes les simplifications qu'on peut apporter à la loi de comportement générale établie aux paragraphes précédents. D'une part, très peu de problèmes sont susceptibles d'être résolus avec la loi générale qui, dans le cas du graphite, n'a pas été déterminée expérimentalement. On examinera les simplifications tant du point de vue de leur signification physique, que du point de vue de la résolution des problèmes mécaniques. On étudie successivement les simplifications dues aux flux de neutrons, à la symétrie du matériau, et enfin celles dues au comportement même du graphite.

II.5.1 - Flux de neutrons stationnaire ou constant.

-a) flux stationnaire.

Généralement, on peut estimer que lors du fonctionnement normal d'un réacteur, les flux se stabilisent aux différents points des structures. Ce n'est qu'au démarrage et à l'arrêt du réacteur, que le flux croît ou décroît assez rapidement. On peut négliger ces périodes transitoires et remplacer le flux réel par un flux moyen pendant la période de fonctionnement du réacteur. Dans ces conditions, la dose de neutrons s'écrit en fonction :

$$\gamma(x,t) = \int_0^t \phi(x,t') dt' \simeq \phi(x)t$$

Les relations de comportement écrites en fonction de x et t :

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_0^t G_{ijke} [\phi(x)(t-t')] \frac{\partial}{\partial t'} [\Sigma_{ke}(x,t') - W_{ke}(x,t')] dt'$$

sont alors du type : produit de convolution. Si on applique à ces relations la transformation de Carson de variable t et de paramètre p , elles deviennent :

$$\sigma_{ij}(x,p) = G_{ijke} \left(\frac{p}{\phi(x)} \right) [\Sigma_{ke}(x,p) - W_{ke}(x,p)]$$

On retrouve dans le cas du flux stationnaire, les relations de comportement d'un matériau viscoélastique hétérogène. Il faut dire que même avec cette simplification le problème reste très complexe.

-b) Flux constant.

Dans de nombreux problèmes, le flux ne varie pas beaucoup à l'intérieur de l'élément de graphite à calculer.

En particulier pour les réacteurs à haute température qui se distinguent des anciens réacteurs graphite-gaz par une beaucoup plus grande répartition du combustible dans la masse du modérateur, l'approximation du flux constant sera souvent justifiée. Les variations importantes de flux sont localisées dans les zones périphériques du réacteur. Le réflecteur en graphite dont le rôle est justement de faire chuter les flux, pose des problèmes particuliers et sera traité au chapitre III.

L'hypothèse du flux constant ramène les équations de la viscoélasticité d'irradiation à celle de la viscoélasticité classique. Les relations (22) et (23) s'écrivent avec cette hypothèse :

$$\overline{\sigma}_{ij}(x,p) = G_{ijke}(p/\phi_{moyen}) [\xi_{ke}(x,p) - w_{ke}(x,p)]$$

où :

$$\xi_{ij}(x,p) - w_{ij}(x,p) = J_{ijke}(p/\phi_{moyen}) \overline{\sigma}_{ke}(x,p)$$

Dans les applications présentes au chapitre III, l'hypothèse du flux constant sera souvent admise parce que les problèmes traités correspondent à des préoccupations réelles où les caractéristiques du matériau sont connues avec peu de précision, d'autres sont d'ailleurs inconnues et devront être étudiées paramétriquement. Il en résulte que l'approximation du flux moyen constant est certainement justifié devant toutes les incertitudes qui pèsent sur toutes les données relatives à l'irradiation.

II.5.2 - Symétrie du matériau.

Pour un exposé général des lois de comportement, nous avons supposé le matériau anisotrope. Or on sait que les graphites sont des matériaux, soit à symétrie transversale, soit isotrope. Explicitons dans les deux cas les relations de comportement. On choisit la présentation des lois de comportement sous forme de transformée^{de Carson} de la variable γ et de paramètre q à cause de sa généralité et sa concision.

Si le flux est stationnaire, $\gamma = \phi(x)t$, on peut passer à la représentation en fonction de x et p en remplaçant q par $p/\phi(x)$, p étant le paramètre de la transformation de Carson de variable t .

-a) Graphite isotrope.

Certains graphites fabriqués par pressage et non par filage sont isotropes. Ils sont recherchés dans les applications nucléaires pour leurs propriétés non corrosives. Comme en élasticité, on peut montrer que deux fonctions $\bar{E}(\gamma)$ et $\bar{\nu}(\gamma)$ suffisent à déterminer entièrement les tenseurs $G_{ijke}(\gamma)$ et $J_{ijke}(\gamma)$.

Sous forme de transformée de Carson, de variable γ et de paramètre q , les relations de comportement s'écrivent dans un repère x_1, x_2, x_3 en négligeant les effets de la température :

$$(25) \quad \varepsilon_{ij}(x, q) - w(q)\delta_{ij} = \frac{1 + \bar{\nu}(q)}{\bar{E}(q)} \sigma_{ij}(x, q) - \frac{\bar{\nu}(q)}{\bar{E}(q)} \sigma_{kk}(x, q) \delta_{ij}$$

et les relations inverses :

$$(26) \quad \sigma_{ij}(x, q) = \bar{\lambda}(q) \varepsilon_{kk}(x, q) \delta_{ij} + 2\bar{\mu}(q) \varepsilon_{ij}(x, q) - (3\bar{\lambda}(q) + 2\bar{\mu}(q))w(q)\delta_{ij}$$

$\bar{E}(q), \bar{\nu}(q), \bar{\lambda}(q), \bar{\mu}(q)$ sont reliés par :

par des relations analogues à celles de l'élasticité :

$$\bar{w}(q) = \frac{\bar{E}(q)}{2[1 + \bar{v}(q)]} \quad \bar{\gamma}(q) = \frac{\bar{v}(q) \bar{E}(q)}{[1 - 2\bar{v}(q)][1 + \bar{v}(q)]}$$

-b) Graphite à symétrie transversale.

Les graphites sont le plus souvent des produits filés ce qui leur donne une structure à symétrie transversale. Soit un repère cartésien x_1, x_2, x_3 où x_3 est parallèle à la direction du filage. On peut montrer, comme en élasticité, que les tenseurs $G_{ijke}(\gamma)$ et $J_{ijke}(\gamma)$ sont entièrement déterminés par cinq fonctions qu'on note $\bar{E}_e(\gamma)$, $\bar{E}_t(\gamma)$, $\bar{G}_e(\gamma)$, $\bar{G}_t(\gamma)$, $\bar{V}_1(\gamma)$, analogues aux coefficients élastiques E_e, E_t, G_e, G_t, V_1 ; l'indice e est relatif à la direction parallèle ou longitudinale et l'indice t est attaché aux directions perpendiculaires ou transversales.

Les relations de comportement vont s'écrire dans le repère x_1, x_2, x_3 , où x_3 est parallèle à la direction e :

$$\varepsilon_{11}(x, q) - w_t(q) = \frac{\tilde{\sigma}_{11}(x, q)}{\bar{E}_t} - \frac{\bar{V}_3}{\bar{E}_t} \tilde{\sigma}_{22}(x, q) - \frac{\bar{V}_1}{\bar{E}_e} \tilde{\sigma}_{33}(x, q)$$

$$(26) \quad \varepsilon_{22}(x, q) - w_t(q) = \frac{\tilde{\sigma}_{22}(x, q)}{\bar{E}_t} - \frac{\bar{V}_3}{\bar{E}_t} \tilde{\sigma}_{11}(x, q) - \frac{\bar{V}_1}{\bar{E}_e} \tilde{\sigma}_{33}(x, q)$$

$$\varepsilon_{33}(x, q) - w_e(q) = \frac{\tilde{\sigma}_{33}(x, q)}{\bar{E}_e} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{E}_t} (\tilde{\sigma}_{11}(x, q) + \tilde{\sigma}_{22}(x, q))$$

$$\varepsilon_{12}(x, q) = \frac{\tilde{\sigma}_{12}(x, q)}{\bar{G}_t(q)}; \quad \varepsilon_{23}(x, q) = \frac{\tilde{\sigma}_{23}(x, q)}{\bar{G}_e(q)}; \quad \varepsilon_{13}(x, q) = \frac{\tilde{\sigma}_{13}(x, q)}{\bar{G}_e(q)}$$

et les relations inverses s'écrivent (en omettant les arguments des fonctions) :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\bar{a}_1^2 - \bar{a}_2^2} \left[\bar{a}_1 (\varepsilon_{11} - w_e) + \bar{a}_2 (\varepsilon_{22} - w_e) + \bar{v}_1 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) (\varepsilon_{33} - w_e) \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\bar{a}_1^2 - \bar{a}_2^2} \left[\bar{a}_1 (\varepsilon_{22} - w_e) + \bar{a}_2 (\varepsilon_{11} - w_e) + \bar{v}_1 (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) (\varepsilon_{33} - w_e) \right]$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{\bar{a}_1 - \bar{a}_2} \left[(\bar{E}_e (\bar{a}_1 - \bar{a}_2) + 2 \bar{v}_1^2) (\varepsilon_{33} - w_e) + \bar{v}_1 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - 2 w_e) \right]$$

Les fonctions $\bar{v}_2(q)$ et $\bar{v}_3(q)$ sont liées aux fonctions $\bar{v}_1(q)$, $\bar{E}_e(q)$, $\bar{E}_t(q)$, $\bar{G}_e(q)$, $\bar{G}_t(q)$, par les relations suivantes :

$$28) \quad \frac{\bar{v}_2(q)}{\bar{E}_t(q)} = \frac{\bar{v}_1(q)}{\bar{E}_e(q)} \quad ; \quad \bar{v}_3(q) = \frac{\bar{E}_t(q)}{2 \bar{G}_t(q)} - 1$$

Les fonctions $\bar{a}_1(q)$ et $\bar{a}_2(q)$ sont définies par :

$$29) \quad \bar{a}_1(q) = \frac{1}{\bar{E}_e(q)} [1 - \bar{v}_1(q) \bar{v}_2(q)] \quad \bar{a}_2(q) = \frac{1}{\bar{E}_t(q)} [\bar{v}_3(q) + \bar{v}_1(q) \bar{v}_2(q)]$$

II.5.3 - Cas particuliers simples : modèles rhéologiques.

La loi de comportement proposée au §.III.2 est la plus générale; elle pourrait représenter n'importe quel matériau qui, sous irradiation, obéirait aux hypothèses du §.III.1. Mais on sait que cette loi de comportement générale ne peut être appliquée à des calculs de structure en graphite parce qu'il faudrait la déterminer expérimentalement, par exemple pour un matériau isotrope, deux fonctions $J_1(\gamma)$ et $J_2(\gamma)$. En s'appuyant sur les résultats expérimentaux connus, on propose deux modèles simples pour décrire le comportement du graphite.

-a) Modèle négligeant le fluage transitoire.

Le modèle le plus simple qu'on peut proposer pour décrire le comportement du graphite sous irradiations consiste à négliger le fluage transitoire. On suppose que la déformation de fluage f est à vitesse constante et n'est pas réversible d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{\sigma}{F}$$

F est le module de fluage. C'est l'inverse du coefficient de fluage K défini par KENNEDY et SIMMONS.

La déformation totale s'écrit en fonction de la contrainte :

$$(30) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} = \frac{\partial W}{\partial \gamma} + \frac{1}{F} \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} + \frac{\sigma}{F}$$

où W est la déformation Wigner.

Si on introduit $\varepsilon^m = \varepsilon^t - W$, on s'aperçoit que la déformation ε^m peut être donnée par le modèle rhéologique de Maxwell dont l'évolution est fonction du paramètre γ au lieu du temps t . Ce modèle représenté par la figure (8) est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle.

La loi de comportement du ressort est

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Celle de l'amortisseur est :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} = \frac{\sigma}{F}$$



Fig : 8

"Modèle de Maxwell"

La relation (30) après transformation de Carson de variable et de paramètre q s'écrit :

$$q \mathcal{E}(q) - q W(q) = q \frac{\mathcal{V}(q)}{E} + \frac{\mathcal{V}}{F}$$

$$E - W = \frac{1}{\bar{E}(q)} \mathcal{V}(q)$$

avec :

$$(31) \quad \frac{1}{\bar{E}(q)} = \frac{1}{E} + \frac{1}{qF}$$

d'où :

$$\bar{E}(x) = E \exp. (- F/E x)$$

On appellera $\bar{E}(q)$ module d'Young opérationnel.

Pour déterminer la loi tridimensionnelle correspondant à ce modèle simple, il faut connaître le coefficient de Poisson opérationnel $\bar{\nu}(q)$. Il faut alors se référer soit des expériences de tubes en torsion, soit à des mesures de déformations transversales d'éprouvettes en contrainte uniaxiale, soit enfin à des expériences en variation de volume. Il ne semble pas que de telles expériences aient été faites ne serait-ce qu'à cause de leur difficulté de mise en oeuvre. Il faut dire que tous les auteurs, (7), (11) considèrent dans leurs applications que le fluage sous irradiation se fait sans variation de volume; dans ce cas $\bar{\nu}(x) = \underline{\nu}$ élastique. Cette hypothèse pourrait être justifiée par des considérations sur les mécanismes microscopiques responsables du fluage.

Nous supposons pour ce modèle, que la variation de volume total est la somme d'une variation de volume élastique et d'une autre partie visqueuse:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{E}_{kk} - \frac{3}{dx} dW = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\partial \mathcal{V}_{kk}}{\partial x} + \frac{1-2k}{F} \mathcal{V}_{kk}$$

et sous forme transformée :

$$\sum_{kk}^m (q) = \frac{1 - 2 \bar{\nu}(q)}{\bar{E}(q)} \bar{\nu}_{kk}$$

Le coefficient de Poisson opérationnel $\bar{\nu}(q)$ est donc défini par :

$$(32) \quad \frac{\bar{\nu}(q)}{\bar{E}(q)} = \frac{\nu}{E} + \frac{k}{qF}$$

k sera appelé "coefficient de Poisson de fluage"; il devra être compris entre 0 et 0,5 .

Cas du graphite à symétrie transversale.

Il s'agit de déterminer les fonctions $\bar{E}_\ell(r)$, $\bar{E}_t(r)$, $\bar{G}_\ell(r)$, $\bar{G}_t(r)$, $\bar{\nu}_1(r)$, $\bar{\nu}_2(r)$, $\bar{\nu}_3(r)$. Par des considérations analogues au cas isotrope, on arrive à :

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}_\ell(q)} &= \frac{1}{E_\ell} + \frac{1}{qF_\ell} ; & \frac{1}{\bar{E}_t(q)} &= \frac{1}{E_t} + \frac{1}{qF_t} \\ \frac{\bar{\nu}_1(q)}{\bar{E}_\ell(q)} &= \frac{\nu_1}{E_\ell} + \frac{k_1}{qF_\ell} ; & \frac{\bar{\nu}_2(q)}{\bar{E}_t(q)} &= \frac{\nu_2}{E_t} + \frac{k_2}{qF_t} ; & \frac{\bar{\nu}_3(q)}{\bar{E}_t(q)} &= \frac{\nu_3}{E_t} + \frac{k_3}{qF_t} \\ \frac{1}{\bar{G}_\ell(q)} &= \frac{1}{G_\ell} + \frac{1}{qH_\ell} ; & \frac{1}{\bar{G}_t(q)} &= \frac{1}{G_t} + \frac{1}{qH_t} \end{aligned}$$

F_ℓ et F_t sont les modules de fluage dans les directions ℓ et t

H_ℓ et H_t sont les modules de cisaillement simple de fluage dans les directions ℓ et t .

k_1 , k_2 , k_3 , sont les coefficients de Poisson de fluage.

On a en plus, les relations suivantes :

$$\frac{k_2}{F_t} = \frac{k_1}{F_\ell} \quad k_3 = \frac{F_t}{2 H_t} - 1$$

- b) Modèle simple tenant compte du fluage transitoire.

Il s'agit d'abord de trouver une loi unidimensionnelle qui donnerait pour une contrainte constante une déformation instantanée élastique suivie d'une déformation à vitesse décroissante, elle-même suivie d'une déformation à vitesse constante (les vitesses sont prises par rapport à la dose). La déformation transitoire doit être réversible alors que la déformation à vitesse constante est permanente. La figure (9) représente l'évolution de la déformation sous l'effet d'une contrainte constante appliquée jusqu'à la dose γ_0 :

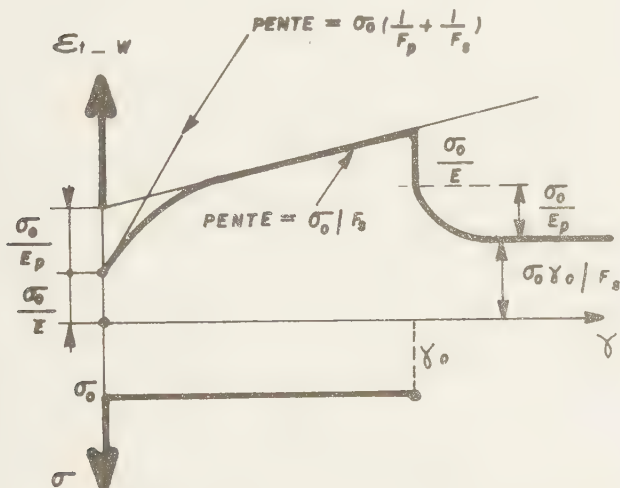


Figure: 9

DEFORMATION ε_{t-w} DU GRAPHITE
D'APRES LE MODELE de BURGHES

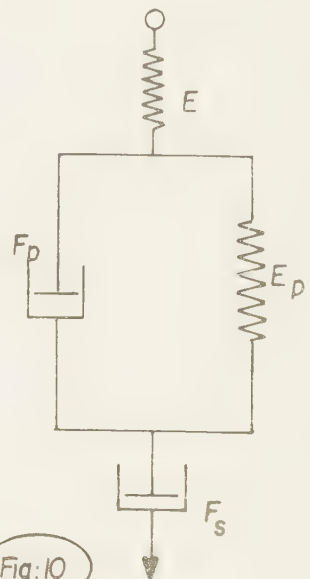


Fig:10

Modèle de BURGHES

Un tel comportement n'est pas nouveau en viscoélasticité. On sait qu'il peut être représenté par le modèle rhéologique de Burghes représenté par la figure (10). La relation de comportement que donne ce modèle s'écrit sous forme différentielle :

$$\frac{d^2 \varepsilon^m}{d\gamma^2} + \frac{2E^p}{F^p} \frac{d\varepsilon^m}{d\gamma} = \frac{1}{2E^o} \frac{d^2 \sigma}{d\gamma^2} + \left(\frac{1}{F^p} + \frac{1}{F^s} + \frac{E^p}{E^o F^p} \right) \frac{d\sigma}{d\gamma} + \frac{2E^p \sigma}{F^p F^s}$$

ε^m est la déformation liée à la contrainte

$$\varepsilon^m = \varepsilon_{t-w}$$

et sous forme opérationnelle :

$$\Sigma^m(q) = \frac{1}{\bar{E}(q)} \bar{\nu}(q)$$

avec :

$$(34) \quad \frac{1}{\bar{E}(q)} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E' + qF'} + \frac{1}{qF^s}$$

Pour un matériau à symétrie transversale, on obtient $E_e(q)$ et $E_t(q)$ définis par des relations analogues à (34). Pour obtenir une loi tridimensionnelle, il faut déterminer le coefficient de Poisson opérationnel, on admettra pour faciliter l'utilisation de ce modèle, que le fluage se fait sans variation de volume. Il en résulte que, pour un matériau isotrope, on a :

$$(35) \quad \frac{1 - 2 \bar{\nu}(q)}{\bar{E}(q)} = \frac{1 - 2 \nu}{E}$$

et pour un matériau à symétrie transversale :

$$(36) \quad \frac{1 - 2 \bar{\nu}_1(q)}{\bar{E}_e(q)} = \frac{1 - 2 \nu_1}{E_e}$$

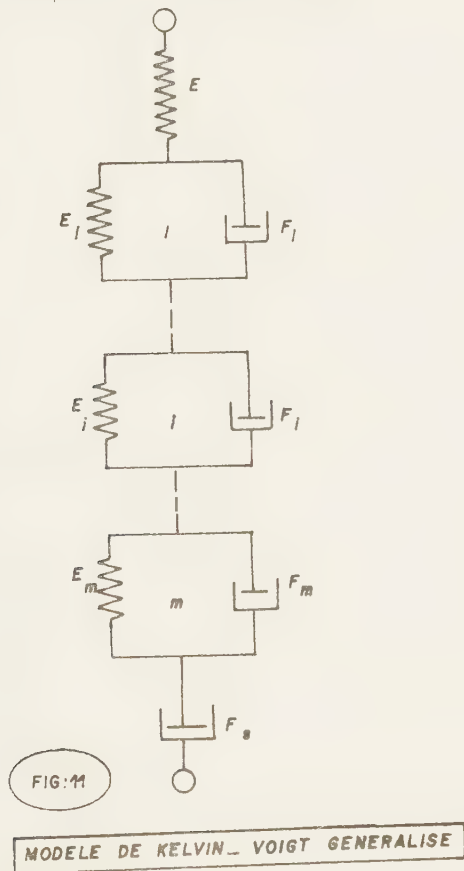
et

$$(37) \quad \frac{1 - \bar{\nu}_3(q) - \bar{\nu}_2(q)}{\bar{E}_t(q)} = \frac{1 - \nu_3 - \nu_2}{E_t}$$

-c) Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

Le modèle de Burghers peut ne pas représenter le comportement de tous les graphites. Si les résultats expérimentaux actuels sont complétés par d'autres plus précis et plus systématiques, il deviendra utile de rechercher une représentation différentielle de la loi de comportement plus élaborée.

Le modèle de KELVIN-VOIGT généralisé, représenté par la figure (11), est composé de couples d'amortisseurs et de ressorts en série. La déformation élastique instantanée est donnée par l'amortisseur libre E ; l'amortisseur F_s permet d'obtenir un fluage indéfini proportionnel à la dose et non réversible. Le fluage transitoire est régi par les amortisseurs E_i et les ressorts F_i .



La fonction de relaxation donnée par ce modèle est :

$$r(q) = E + \sum_1^m \frac{E_i \lambda_i}{q + \lambda_i} + \frac{1}{q F_s}$$

sous forme opérationnelle et par :

$$r(\gamma) = E + \sum_1^m E_i (1 - \exp(-\lambda_i \gamma)) + \frac{\gamma}{F_s}$$

en fonction de la dose γ .

La détermination expérimentale des λ_i , E_i , peut être largement facilitée par des représentations des modules de complaisances complexes dans les plans complexes arithmétiques et logarithmiques. Voir Ch. HUET (8)

CHAPITRE III

APPLICATIONS AUX STRUCTURES EN GRAPHITE

III.1 - DISCUSSION DES METHODES DE RESOLUTION.

III.1.1 - Méthodes analytiques.

Pour examiner les méthodes de résolution des problèmes de contraintes dans le graphite sous irradiation, il est important de se placer dans le cadre plus général des matériaux viscoélastiques linéaires, non homogènes et vieillissants. Pour de tels matériaux, les relations contrainte-déformation sont du type :

$$\varepsilon(x, t) = \int_0^t G(x, t, t') \frac{\delta \sigma}{\delta t'}(x, t') dt'$$

le graphite sous irradiation a un comportement viscoélastique rhéologiquement simple, ce qui correspond à une forme particulière de l'argument du noyau de l'opérateur, on a :

$$G(x, t, t') = G \left[\gamma(x, t) - \gamma(x, t') \right]$$

où $\gamma(x, t)$ est la dose de neutrons reçus. Ce noyau de l'opérateur intégral, fonction de la variable d'espace x , est la cause de la difficulté principale dans la résolution des problèmes de viscoélasticité. Examinons selon la forme de ce noyau, les méthodes de résolution possibles :

-1°) Corps homogène non vieillissant : $G(t-t')$

C'est le cas le plus simple, celui de viscoélasticité usuelle. On sait alors que la transformation de Carson des relations de comportement et des autres équations générales permet l'utilisation de l'analogie élastique pour des conditions aux limites appropriées.

Pour le graphite sous irradiation, on sait que l'hypothèse du flux de neutrons constant nous ramène à cette viscoélasticité usuelle. Cette hypothèse du flux constant est souvent justifiée devant toutes les incertitudes qui pèsent sur toutes les données qu'on obtient à partir des expériences d'irradiations. Aussi l'avons-nous adoptée pour traiter certains problèmes de constantes du graphite dans les réacteurs nucléaires qui sont exposés au §III.2 : cylindre creux soumis à un flux symétrique, ou dissymétrique, sphère bicouche.

-2°) Corps vieillissant : $G(t, t')$.

Le cas des matériaux viscoélastiques dont les propriétés dépendent de l'âge, ou des matériaux vieillissants, a été traité par MANDEL (14). Bien que nous n'avons pas utilisé ce modèle pour le graphite sous irradiation, il est utile de rappeler la méthode de résolution proposée. Les relations de comportement sont formellement analogues à celles de l'élasticité :

$$\sigma_{ij} = \dot{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \dot{\mu} \varepsilon_{ij}$$

où $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$ sont des opérateurs intégraux qu'on définit par :

$$\dot{\lambda} \varphi = \int_0^t \dot{\lambda}(t, u) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, z) du$$

$\dot{\mu}$ a une définition analogue.

Comme ces opérateurs sont indépendants de la variable d'espace et admettent des inverses, on peut reprendre tous les calculs de l'élasticité en respectant l'ordre des inversions car le produit des opérateurs n'est pas commutatif. Les problèmes en viscoélasticité, correspondant à des problèmes en élasticité dont la solution est connue, se réduisent à la résolution d'équation de Volterra de 2ème espèce.

-3°) Corps non homogène :

Nous pouvons distinguer ici trois cas :

a) $G(x, t, t')$

C'est le corps viscoélastique le plus général, vieillissant et non homogène.

b) $G[\varphi(x, t) - \varphi(x, t')]$

On dit que le matériau est rhéologiquement simple; c'est un cas particulier du précédent. Le graphite sous irradiation quand le flux de neutrons est fonction des coordonnées $x = x_1, x_2, x_3$ et du temps, appartient à cette classe de matériaux.

c) $G(x, t - t')$

Le corps est non homogène et non vieillissant. Le graphite sous irradiation est un corps de ce type, si le flux de neutrons est stationnaire: $\varphi = \varphi(x)$.

Pour tous ces corps, la difficulté essentielle dans les calculs provient du fait que le noyau de l'opérateur intégral dépend de la variable d'espace x . Seul le problème du mur infini admet une solution simple qu'on reprendra pour étudier ces contraintes dans un réflecteur en graphite. Plusieurs auteurs ont recherché des solutions aux problèmes de sphères et de cylindres dont les propriétés viscoélastiques dépendent de la température. Comme ces recherches concernaient apparemment les combustibles solides d'engins aérospatiaux, l'un des rayons de la sphère ou du cylindre était fonction du temps pour tenir compte de l'évanescence de la matière par combustion. Ces recherches concernant les cylindres et sphères subissant une ablation, peuvent s'appliquer aux problèmes de corrosion du graphite des canaux de refroidissement des éléments modérateurs. Cette corrosion est surtout importante aux hautes températures. Une étude complète des contraintes en cours de fonctionnement dans les éléments combustibles cylindriques ou sphériques, devrait tenir compte du rayon variable à cause de la corrosion.

Le problème du cylindre a été étudié par divers auteurs dans des conditions plus ou moins restrictives. MORLAND et LEE (18) ont supposé le matériau incompressible, tandis que VAKANIS et LIANIS (32) ont obtenu la solution dans le cas où le coefficient de Poisson opérationnel est constant. Ces solutions obtenues pour des matériaux rhéologiquement simples, ne peuvent être étendues aux corps non homogènes vieillissants.

La solution du cylindre creux la plus générale pour un matériau viscoélastique non homogène et vieillissant ayant en plus un rayon variable a été obtenue en 1969 par EDELSTEIN (31). En raison de l'importance qu'elle peut avoir pour les problèmes de corrosion des canaux dans les cylindres de graphite modérateur, nous exposerons au § (III.21), les grandes lignes de cette solution.

Le problème de la sphère a été étudié par MUKI et STERNBERG (33), STERNBERG et GURTIN (26), ROGERS et LEE (17) pour les corps viscoélastiques rhéologiquement simples en supposant que la dilatation du matériau est purement élastique. Cette dernière hypothèse permet de réduire à une équation intégrale de convolution de Volterra, un système de deux équations intégrales. Cette solution peut être étendue au corps vieillissant en se rappelant les résultats obtenus par MANDEL (12) pour ces matériaux. Nous donnons au § III.2.2 la solution générale de la sphère pour un matériau hétérogène et vieillissant.

III.1.2 - Méthodes de résolution numérique.

Les méthodes numériques que nous utilisons ont pour base la résolution du problème par itération à partir de la solution élastique. En effet les matériaux viscoélastiques ayant une élasticité instantanée ont des relations de comportement qui peuvent s'écrire :

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \gamma_{ijkl} \sigma_{ij}(x,t) + \int_0^t j_{ijkl}(x,t,t') \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t'}(x,t') dt'$$

Le terme de déformation différée ou de fluage, ϵ_{ij}^n peut être considéré comme une déformation résiduelle. On résoud le problème élastique en supposant ϵ_{ij}^n connu. Comme ce terme, en fait, dépend de l'histoire des contraintes on le calcule par itération.

Il faut remarquer que la forme du noyau de l'intégrale n'a aucune incidence sur la méthode de résolution, contrairement à ce qui se passe dans les résolutions analytiques, cette méthode de résolution est donc valable pour tout corps viscoélastique homogène ou non homogène, vieillissant ou non vieillissant.

On a traité le problème d'un combustible cylindrique compris entre deux gaines de graphite appelées combustible tubulaire interactif.

Avec les réacteurs à haute température qui mettent en jeu des éléments prismatiques en graphite à géométrie complexe, est apparue la nécessité d'avoir une méthode de résolution qui ne soit pas spécifique à une géométrie donnée. C'est pourquoi nous avons appliqué la méthode des éléments finis pour les problèmes plans en tenant compte du fluage par la procédure d'itération mentionnée plus haut.

III.2 - RESOLUTION PAR INVERSION DU SYSTEME D'EQUATION DE VOLTERRA.

III.2.1 - Ablation et effet thermique dans un cylindre viscoélastique. EDELSTEIN (1969)

On considère le problème du cylindre creux d'un matériau viscoélastique hétérogène vieillissant. Le rayon intérieur augmente en fonction du temps, tandis que le rayon extérieur est confiné par un anneau élastique.

Soit b le rayon fixe et $a(t)$ le rayon intérieur variable où :

$$a(0) = a > 0, \quad \dot{a}(t) \geq 0 \text{ et } a(t) < b$$

Les relations de comportement du matériau supposé isotrope s'écrivent :

$$S_{ij} = V_{G1} \epsilon_{ij}$$

$$\sigma_{kk} = V_{G2} \epsilon_{kk} - V_{G2} \Theta$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$V G_i \quad i=1,2$ est l'opérateur ^{pour le corps} viscoélastique, non homogène et vieillissant :

$$V G_i [f](r, t) = \gamma_i f(r, t) + \int_0^t g_i(r, t, t') f(r, t') dt'$$

Si le matériau est rhéologiquement simple, comme le graphite :

$$\gamma_i = G_i(0)$$

$$g_i(r, t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} G_i(\gamma(r, t) - \gamma(r, t'))$$

les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\sigma_r(a(t), t) = 0 \quad t > 0$$

$$\sigma_r(b, t) = -B \varepsilon_\theta(b, t) \quad t > 0$$

La constante B dépend de l'épaisseur et du module élastique du cylindre périphérique. Dans le cas des problèmes de cylindres de modérateur de graphite, on prend $B = 0$.

Le cylindre étudié est dans des conditions de révolution dans un repère cylindrique r, θ, z , on a donc pour les relations déplacement-déformation :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zr} = 0$$

Les relations de comportement s'écrivent :

$$(38) \quad \varepsilon_r = V_{G_1}^{-1} (I + V_N) \sigma_r + V_{G_1}^{-1} V_N \sigma_\theta + \psi$$

$$(39) \quad \varepsilon_\theta = V_{G_1}^{-1} (I + V_N) \sigma_\theta + V_{G_1}^{-1} V_N \sigma_r + \psi$$

ou :

$$V_N = V_{G_1 - G_2} V_{G_1 + 2G_2}^{-1}$$

$$\psi = V_{G_1}^{-1} (I + 2V_N) V_{G_2} \textcircled{w}$$

I est l'opérateur identique et on utilise la notation V_G^{-1} pour désigner l'inverse de l'opérateur V_G . Si α et β sont des constantes, on pose :

$$\alpha V_G + \beta V_H = V_{\alpha G + \beta H}$$

Les équations différentielles du problème sont données par la condition de compatibilité :

$$(40) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_\theta)$$

et l'équation de l'équilibre :

$$(41) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F = 0$$

Par des substitutions, on élimine σ_θ et ε_r des quatre équations : (38), (39), (40), (41), on obtient :

$$\varepsilon_\theta = V_{G_1}^{-1} (I + V_N) \left[r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r + r F \right] + V_{G_1}^{-1} V_N \sigma_r + \psi$$

$$\frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r} = V_{G_1}^{-1} (I + V_N) \sigma_r + V_{G_1}^{-1} V_N \left[r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r + r F \right] + \psi$$

Quand les opérateurs V_{G_1} et V_N sont écrits, on obtient en faisant apparaître les parties élastiques des opérateurs :

$$(1+\nu) r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (1+2\nu) \sigma_r - \gamma_1 \varepsilon_\theta$$

$$(42) \quad + \int_0^t \left\{ N(r, t, t') \left(r \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t') + 2 \sigma_r(r, t') - g_1(r, t, t') \varepsilon_\theta(r, t') \right) \right\} dt' =$$

$$= - (I + V_N) r F - V_{G_1} \psi = P_1(r, t)$$

et :

$$v r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (1+2v) \sigma_r - \gamma_1 \frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r} +$$

$$(43) + \int_0^t \left\{ N(r, t, t') \left[r \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t') + 2 \sigma_r(r, t') \right] - g_1(r, t, t') \frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r} \right\} dt' =$$

$$= - V_N r F - V_{G_1} \psi = P_2(r, t)$$

Dans ces équations, on a posé :

$$V_N f(r, t) = v f(r, t) + \int_0^t N(r, t, t') f(t') dt'$$

Les équations (42) et (43) constituent un système d'équations intégrales

avec des conditions aux limites en σ_r et ε_θ : on pose :

$$(44) (1+v) r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + (1+2v) \sigma_r - \gamma_1 \varepsilon_\theta = e_1(r, t)$$

$$(45) v r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (1+2v) \sigma_r - \gamma_1 \frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r} = e_2(r, t)$$

En intégrant ces équations en tenant compte des conditions aux limites, on obtient σ_r et ε_θ en fonction $e_1(r, t)$ et $e_2(r, t)$.

$$(46) \begin{aligned} 2 r^2 (1+v) \sigma_r(r, t) &= \int_{a(t)}^r (r^2 + y^2) e_1(y, t) \frac{dy}{y} \\ &+ (a^2(t) - r^2) \int_{a(t)}^b q(iy, a(t)) e_1(y, t) \frac{dy}{y} + \int_{a(t)}^r (y^2 - r^2) e_2(y, t) \frac{dy}{y} \\ &+ (r^2 - a^2(t)) \int_{a(t)}^b q(y, a(t)) e_2(y, t) \frac{dy}{y} ; \end{aligned}$$

$$(47) \begin{aligned} 2 \gamma_1 (1+v) r^2 \varepsilon_\theta(r, t) &= \int_{a(t)}^r [(1+2v) r^2 - y^2] e_1(y, t) \frac{dy}{y} - \\ &- [(1+2v) r^2 + a^2(t)] \int_{a(t)}^b q(iy, a(t)) e_1(y, t) \frac{dy}{y} - \\ &- \int_{a(t)}^r [(1+2v) r^2 + y^2] e_2(y, t) \frac{dy}{y} + \end{aligned}$$

$$+ [(1+2\nu)r^2 + a^2(t)] \int_{a(t)}^b q(y, a(t)) e_2(y, t) \frac{dy}{y}$$

où :

$$q(\xi, \eta) = \frac{[\gamma_1 + B(1+2\nu)b^2 + (B-\gamma_1)\xi^2]}{[\gamma_1 + B(1+2\nu)b^2 + (B-\gamma_1)\eta^2]}$$

posons :

$$n(r, \xi, t, t') = \frac{N(r, t, t')}{1+\nu} - \frac{g_1(r, t, t')}{2\gamma_1(1+\nu)r^2} ((1+2\nu)r^2 + \xi^2)$$

La substitution des équations (46) et (47) dans (44) et (45) conduit au système de deux équations intégrales de Volterra :

$$\begin{aligned} (48) \quad & e_1(r, t) + \int_0^t \frac{N(r, t, t')}{(1+\nu)} e_1(r, t') dt' + \\ & + \int_0^t \int_{a(t')}^r n(r, y, t, t') e_1(y, t') \frac{dy}{y} dt' - \\ & - \int_0^t \int_{a(t')}^b n(r, a(t'), t, t') q(y, a(t')) e_1(y, t') \frac{dy}{y} dt' - \\ & - \int_0^t \int_{a(t')}^b n(r, y, t, t') e_2(y, t') \frac{dy}{y} dt' + \\ & + \int_0^t \int_{a(t')}^b n(r, a(t'), t, t') q(y, a(t')) e_2(y, t') \frac{dy}{y} dt' = P_1(r, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (49) \quad & \int_0^t \frac{1}{1+\nu} [N(r, t, t') - \frac{\nu}{\gamma_1} g_1(r, t, t')] e_1(r, t') dt' + \\ & + \int_0^t \int_{a(t')}^r n(r, y, t, t') e_1(y, t') \frac{dy}{y} dt' - \\ & - \int_0^t \int_{a(t')}^b n(r, a(t'), t, t') q(y, a(t')) e_1(y, t') \frac{dy}{y} dt' \\ & + e_2(r, t) + \int_0^t \frac{1}{\gamma_1} g_1(r, t, t') e_2(r, t') dt' \\ & - \int_0^t \int_{a(t')}^r n(r, y, t, t') e_2(y, t') \frac{dy}{y} dt' \\ & + \int_0^t \int_{a(t')}^b n(r, a(t'), t, t') q(y, a(t')) e_2(y, t') \frac{dy}{y} dt' = P_2(r, t) \end{aligned}$$

Ce système peut être résolu par la méthode d'expansion de NEUMANN.
(voir (28)); écrivons les équations sous la forme :

$$\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 = P_1$$

(50)

$$\kappa_3 e_1 + \kappa_4 e_2 = P_2$$

où κ_i sont les opérateurs intégraux définis dans les équations (48) et (49).

La solution s'écrit :

$$e_1 = \kappa_1^{-1} P_1 - \kappa_1^{-1} \kappa_2 (\kappa_4 - \kappa_3 \kappa_1^{-1} \kappa_2)^{-1} (P_2 - \kappa_3 \kappa_1^{-1} P_1)$$

$$e_2 = (\kappa_4 - \kappa_3 \kappa_1^{-1} \kappa_2)^{-1} (P_2 - \kappa_3 \kappa_1^{-1} P_1)$$

Une autre représentation de la solution en $e_1(n, t)$ et $e_2(n, t)$ s'obtient en posant :

$$\kappa_1 = I + \hat{\kappa}_1 \quad ; \quad \kappa_4 = I + \hat{\kappa}_4$$

ce système (50) peut s'écrire :

$$(I + \kappa) e = P$$

où :

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

et κ est une matrice d'opérateurs intégraux :

$$\kappa = \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & \hat{\kappa}_4 \end{bmatrix}$$

L'équation (51) a pour solution :

$$e = (I + \kappa)^{-1} P = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \kappa^n P$$

III.2.2 - Effets thermiques dans une sphère viscoélastique.

En suivant EDELSTEIN, nous donnons ci-dessous la solution la plus générale du problème de la sphère viscoélastique hétérogène vieillissante.

Considérons une sphère creuse soumise à des déformations sphériques imposées $\theta(r, t)$ qui peuvent être d'origines diverses, thermiques, Wigner ou autre. Le matériau composant la sphère est viscoélastique hétérogène vieillissant. On utilise des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Les relations de déformation-déplacement sont :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} ; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

Les équations de l'équilibre se réduisent à :

$$(52) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

et comme condition de compatibilité, on a :

$$(53) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r}$$

Les relations de comportement s'écrivent dans le cas de la symétrie sphérique :

$$(54) \quad \varepsilon_r(r, t) = V_{J1} \sigma_r + \frac{1}{3} (V_{J2} - V_{J1}) (\sigma_r + 2\sigma_\theta) + \theta(r, t)$$

$$(55) \quad \varepsilon_\theta(r, t) = V_{J1} \sigma_\theta + \frac{1}{3} (V_{J2} - V_{J1}) (\sigma_r + 2\sigma_\theta) + \theta(r, t).$$

où V_J est l'opérateur viscoélastique qui, en faisant apparaître la partie élastique, est défini par :

$$V_J[f](r,t) = J f(r,t) + \int_0^t \delta(r,t,t') f(r,t') dt'$$

le module élastique J est supposé constant .

L'équation (52) peut s'écrire :

$$(56) \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r}$$

Des équations (53), (56), (54), (55), on peut éliminer ε_r et σ_θ , on obtient ces deux équations en σ_r et ε_θ .

$$\varepsilon_\theta = V_{J_1} \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{3} (V_{J_2} - V_{J_1}) \left[\sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} \right] + \theta(r,t)$$

$$\frac{\partial(r \varepsilon_\theta)}{\partial r} = V_{J_1} [\sigma_r] + \frac{1}{3} (V_{J_2} - V_{J_1}) \left[\sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} \right] + \theta(r,t)$$

En faisant apparaître la partie élastique de l'opérateur viscoélastique, on peut écrire :

$$\varepsilon_\theta - J_1 \frac{1}{2r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} - \frac{1}{3} (J_2 - J_1) \left(\sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} \right) = e_1(r,t)$$

$$\frac{\partial(r \varepsilon_\theta)}{\partial r} - J_1 \sigma_r - \frac{1}{3} (J_2 - J_1) \left(\sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \sigma_r)}{\partial r} \right) = e_2(r,t)$$

où $e_1(r,t)$ et $e_2(r,t)$ sont deux fonctions intermédiaires définies par :

$$e_1(r,t) = \theta(r,t) - \frac{1}{2} \int_0^t \delta_1(r,t,t') \sigma_r(r,t') dt' -$$

(57)

$$+ \frac{1}{6} \int_0^t \frac{1}{r^2} (2 \delta_2(r,t,t') + \delta_1(r,t,t')) \frac{\partial[r^3 \sigma_r(r,t')]}{\partial r} dt'$$

$$(58) \quad \begin{aligned} e_2(r, t) = & \Theta(r, t) + \int_0^t f_1(r, t, t') \sigma_r(r, t') dt' \\ & + \frac{1}{3} \int_0^t \frac{1}{r^2} (f_2(r, t, t') - f_1(r, t, t')) \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \sigma_r(r, t')] dt' \end{aligned}$$

Les relations (57) et (58) s'inversent pour donner σ_r et ε_θ en fonction e_1 et e_2 . On obtient pour une sphère creuse et compte tenu des conditions aux limites $\sigma_r = 0$, $r = a$ et $r = b$.

$$\frac{1}{2} (2J_2 + J_1) r^3 \sigma_r(r, t) = - \int_a^r (2\rho^3 + r^3) e_1(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho} - \int_a^r (\rho^3 - r^3) e_2(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$+ \int_a^b \frac{a^3 - r^3}{a^3 - b^3} (2\rho^3 + b^3) e_1(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho} + \int_a^b \frac{a^3 - r^3}{a^3 - b^3} (\rho^3 - b^3) e_2(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$(2J_2 + J_1) r^3 \varepsilon_\theta(r, t) = \int_a^r (2J_1 \rho^3 - 2J_2 r^3) e_1(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho} + \int_a^r (J_1 \rho^3 + J_2 r^3) e_2(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$- \int_a^b \frac{2\rho^3 + b^3}{a^3 - b^3} (2J_2 r^3 + J_1 a^3) e_1(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$- \int_a^b \frac{\rho^3 - b^3}{a^3 - b^3} (2J_2 r^3 + J_1 a^3) e_2(\rho, t) \frac{d\rho}{\rho}$$

En remplaçant les expressions de σ_r et ε_θ trouvées dans les équations (57) et (58), on obtient les équations par rapport à e_1 et e_2 :

$$\begin{aligned}
 & (2J_2 + J_1) e_1(r, t) + \int_0^t \int_a^r \frac{2}{r^3} (r^3 f_2(\rho, t, t') - \rho^3 f_1(\rho, t, t')) e_1(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' \\
 & - \int_0^t \int_a^r \frac{1}{r^3} (2r^3 f_2(\rho, t, t') + \rho^3 f_1(\rho, t, t')) e_2(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' \\
 & + \int_0^t \int_a^b \frac{1}{r^3} \cdot \frac{2\rho^3 + b^3}{a^3 - b^3} (2r^3 f_2(\rho, t, t') + a^3 f_1(\rho, t, t')) e_1(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' \\
 & + \int_0^t \int_a^b \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\rho^3 - b^3}{a^3 - b^3} (2r^3 f_2(\rho, t, t') + a^3 f_1(\rho, t, t')) e_2(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' \\
 & + \int_0^t (2f_2(r, t, t') + f_1(r, t, t')) e_1(r, t') dt' = (2J_2 + J_1) \Theta(r, t)
 \end{aligned}$$

L'autre équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & (2J_2 + J_1) e_2(r, t) + \int_0^t \int_a^r \frac{2}{r^3} (r^3 f_2(\rho, t, t') + 2\rho^3 f_1(\rho, t, t')) e_1(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' \\
 & + \int_0^t \int_a^r \frac{2}{r^3} (\rho^3 f_1(\rho, t, t') - r^3 f_2(\rho, t, t')) e_1(\rho, t') \frac{d\rho}{\rho} dt' -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_a^b \frac{2}{r^3} \frac{(p^3 - b^3)}{(a^3 - b^3)} (a^3 f_1(p, t, t') - r^3 f_2(p, t, t')) e_2(p, t') \frac{dp}{p} dt' \\
 & + \int_0^t 2 (f_2(r, t, t') - f_1(r, t, t')) e_1(r, t') dt' = (2J_2 + J_1) \Theta(r, t).
 \end{aligned}$$

Les équations (57) et (60) apparaissent comme un système d'équations intégrales de Volterra, dont la résolution peut se faire suivant les méthodes proposées par EDELSTEIN pour le cylindre.

Si le matériau est rhéologiquement simple, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}
 f_1(r, t, t') &= \frac{\partial}{\partial t'} f_1'(\gamma(r, t) - \gamma(r, t')) \\
 f_2(r, t, t') &= \frac{\partial}{\partial t'} f_2'(\gamma(r, t) - \gamma(r, t'))
 \end{aligned}$$

la transformation de Carson de variable γ et de paramètre q permet de remplacer les intégrales fonctions du temps, par des intégrales du paramètre q . Le système d'équation obtenu est encore du type intégral mais ayant comme unique variable r .

Dans la technologie nucléaire, la solution analytique et générale de la sphère n'a pas seulement une portée académique : elle est fondamentale pour la solution exacte du problème du combustible en boulet composé de deux matériaux viscoélastiques hétérogènes occupant deux zones concentriques. Une solution simplifiée de ce problème est exposée au § III.3.4.

III.3 - RESOLUTION PAR LES TRANSFORMEES DE CARSON.

III.3.1 - Mur infini de graphite sous irradiation - Effet des cyclages thermiques.

Généralement le réflecteur d'un réacteur à haute température est constitué par un empilement d'éléments de graphite formant un mur circulaire. Si on suppose ce mur monolithique, c'est-à-dire si l'assemblage des éléments est fait avec un jeu nul, on est dans les conditions les plus défavorables du point de vue des contraintes. Le rayon du réacteur étant grand vis-à-vis de l'épaisseur du mur réflecteur, on peut étudier un mur plan infini au lieu du mur cylindrique infini. Cette hypothèse nous permet d'étudier l'influence des différents facteurs qui caractérisent un mur réflecteur. En effet, si z est un axe perpendiculaire au plan du mur et si le flux de neutrons Φ et le champ de température T ne dépendent que de cette coordonnée z , la solution en contrainte s'obtient sous forme explicite. On peut donc tenir compte du flux variable sur la déformation de fluage et de l'influence de la température sur le coefficient de fluage et sur les déformations Wigner. On étudiera particulièrement le cas d'un réacteur maintenu chaud pendant les arrêts et celui d'un réacteur qui se refroidit normalement pendant les arrêts.

Considérons un mur plan infini de graphite isotrope d'épaisseur d ; soit x, y, z , un repère orthonormé où z est perpendiculaire au mur, il reçoit un flux de neutrons $\Phi(z)$ fortement décroissant, il est aussi soumis à un champ de température $T(z,t)$.

Ecrivons les équations générales de ce mur infini, on a pour les déplacements :

$$U = V = 0$$

$$W = W(z, t)$$

et pour les déformations :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

les équations d'équilibre se réduisent à :

$$(61) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

en tenant compte des conditions aux limites $\sigma_z = 0$, pour $z = 0$ et $z = d$ en déduit de (61) $\sigma_z(z, t) = 0$.

La solution pour les contraintes non nulles σ_{xx} et σ_{yy} s'obtient directement à partir des relations de comportement (23). On obtient sous forme de transformée de Carson en fonction de z et p :

$$\sigma_{xx}(z, p) = \sigma_{yy}(z, p) = \frac{\bar{E}(p/\phi(z))}{1 - \bar{\nu}(p/\phi(z))} \left[-\alpha T(z, \frac{p}{\phi(z)}) - w(\frac{p}{\phi(z)}) \right]$$

Réacteur maintenu chaud pendant les arrêts.

En négligeant les effets transitoires, la température peut s'écrire :

$$T(z, t) = T(z) H(t)$$

où t est le temps d'exposition et non le temps réel, et $H(t)$ est la fonction d'Heavyside définie par :

$$\begin{aligned} H(t) &= 0 & t < 0 \\ &\text{si} \\ H(t) &= 1. & t > 0 \end{aligned}$$

On suppose ainsi que le réacteur atteint sa température d'équilibre instantanément.

$w(z, t)$ et $T(z, t)$ s'écrivent en transformées :

$$T(z, p) = T(z)$$

Si on adopte pour la forme suivante, voir (11) ;

$$W(y) = m y^2 + n y$$

sachant que $Y = \phi(z) * t$, w s'écrit sous forme de transformée :

$$W(z, p) = m \frac{p^2}{\phi(z)^2} + n \frac{p}{\phi(z)}$$

Pour avoir la solution en fonction de z et de t , il suffit de trouver les originaux de :

$$f_0(z, p) = \frac{\bar{E}(z, p)}{1 - \bar{V}(z, p)} ; f_1(z, p) = \frac{\bar{E}(z, p)}{p(1 - \bar{V}(z, p))} ; f_2(z, p) = \frac{\bar{E}(z, p)}{p^2(1 - \bar{V}(z, p))}$$

$\bar{E}$ et $\bar{V}$ sont donnés par (34), (35). On trouve finalement :

$$f_0(z, t) = \frac{E}{1 - \bar{V}} \cdot \frac{F_s}{F_p} [M_1 \exp(-\mu_1 t) + M_2 \exp(-\mu_2 t)]$$

$$f_1(z, t) = \frac{E}{1 - \bar{V}} \cdot \frac{F_s}{F_p} \left[\frac{M_1}{\mu_1} (1 - \exp(-\mu_1 t)) + \frac{M_2}{\mu_2} (1 - \exp(-\mu_2 t)) \right]$$

$$f_2(z, t) = \frac{E}{1 - \bar{V}} \cdot \frac{F_s}{F_p} \left[\frac{M_1}{\mu_1^2} (-1 + \mu_1 t + \exp(-\mu_1 t)) + \frac{M_2}{\mu_2^2} (-1 + \mu_2 t + \exp(-\mu_2 t)) \right]$$

où $-\mu_1$ et $-\mu_2$ sont les racines réelles négatives de :

$$4 p^2 \frac{F_p F_s}{\phi(z)^2} + p \left[\frac{2E}{1 - \bar{V}} \frac{F_p + F_s}{\phi(z)} + \frac{4E p F_s}{\phi(z)} \right] + \frac{2E E p}{1 - \bar{V}} = 0$$

et

$$M_1 = \frac{F_s \lambda - \mu_1}{F_s \mu_2 - \mu_1} ; M_2 = \frac{F_p \mu_2 - \lambda}{F_s \mu_2 - \mu_1} ; \lambda = \frac{E p \phi(z)}{F_p}$$

Finalement σ_{xx} et σ_{yy} s'écrivent en fonction de z et t .

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = -\alpha T(z) \rho_0(z,t) - n \phi(z) \rho_1(z,t) - m \phi^2(z) \rho_2(z,t)$$

Réacteur subissant un refroidissement pendant les arrêts :

Pendant l'arrêt d'un réacteur nucléaire la chute du flux neutronique provoque celle du flux thermique, au redémarrage c'est l'inverse qui se produit ; la température se stabilise généralement dans le réacteur au bout d'une dizaine de jours. On peut négliger ces périodes transitoires de montée et de chute de température vis à vis du temps de fonctionnement du réacteur, on pourra considérer qu'à l'arrêt la température s'annule et puis reprend sa valeur stationnaire instantanément, fig.12.

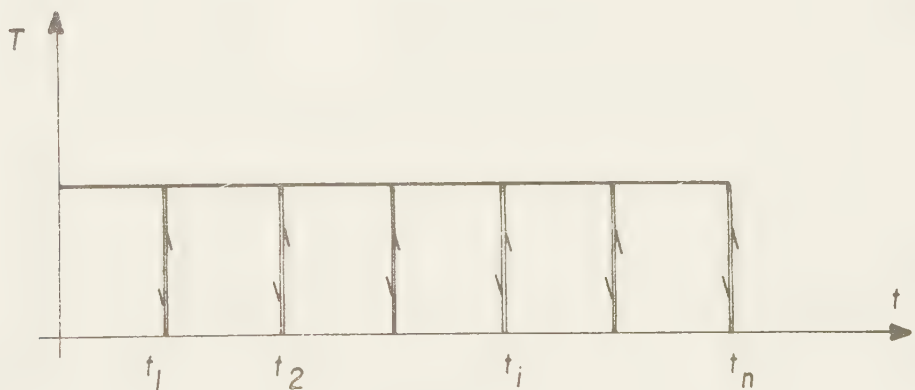
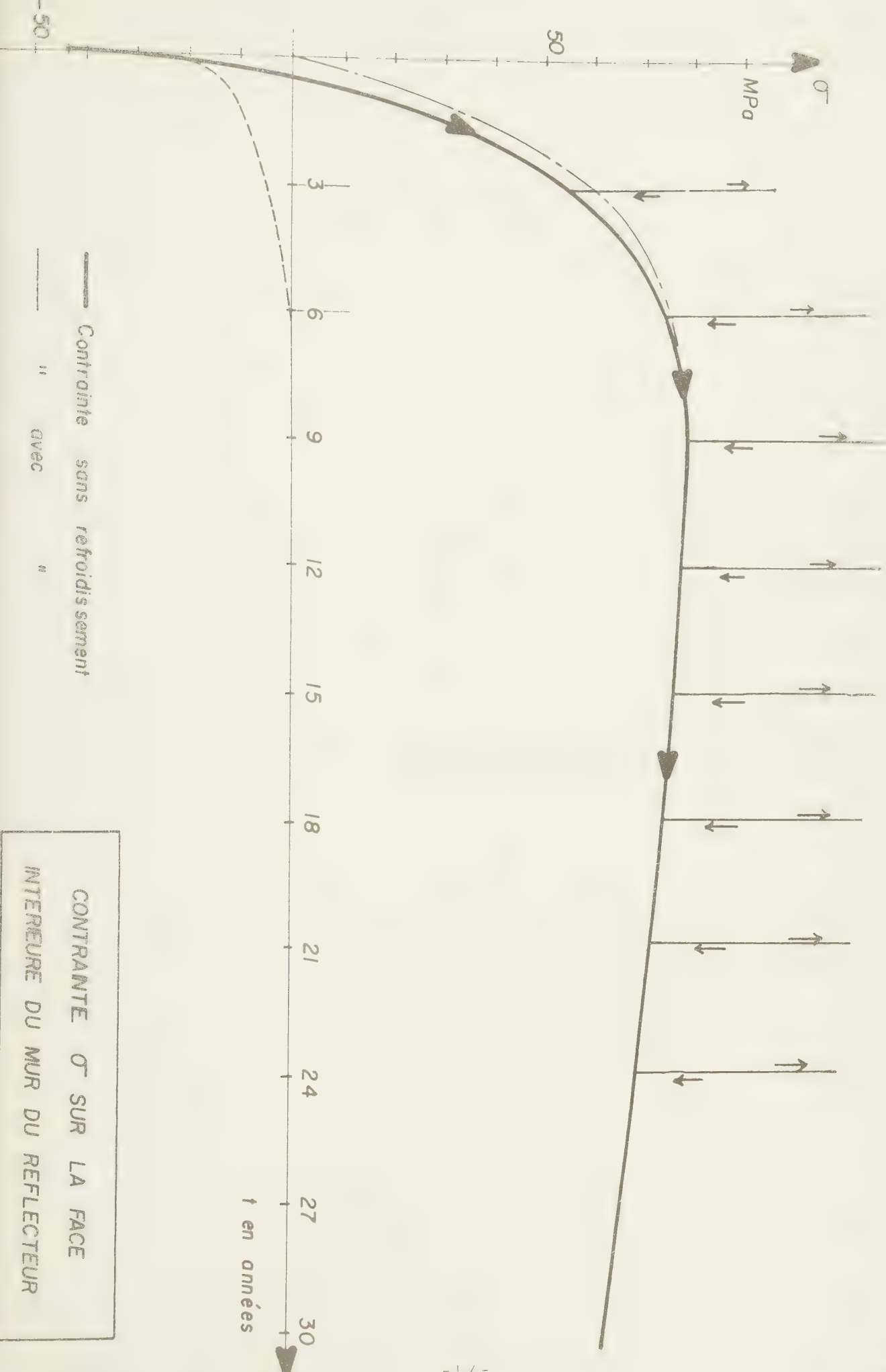


Figure: 12

Pour le mur infini, les déformations dans son plan étant nulles, il se superpose au refroidissement des contraintes égales mais de signes opposés aux contraintes thermiques initiales :

$$\sigma_x = \sigma_y = - \frac{E}{1-\nu} \alpha T(z)$$

Au redémarrage, après le réchauffement, les contraintes thermiques dues au refroidissement sont annulées. Chaque arrêt se solde pour le mur par un pic de contrainte égal à la contrainte thermique initiale, mais de signe opposé. La fig. (13) illustre l'évolution des contraintes dans les deux cas de fonctionnement d'un réacteur avec ou sans refroidissement aux arrêts ; il apparaît que le maintien à chaud d'un réacteur pendant les arrêts à l'aide d'installations annexes, permet de réduire les contraintes maximales atteintes.



CONTRAINTE σ SUR LA FACE
INTERIEURE DU MUR DU REFLECTEUR

III.3.2 - Cylindre creux soumis à un flux de révolution.

Il s'agit de calculer l'évolution des contraintes dans un cylindre creux (figure (14)), dues aux déformations Wigner $w(r,t)$ résultant d'un flux de neutrons de révolution $\phi(r)$.

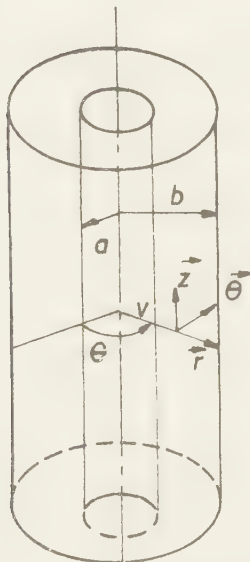


Figure :14

Cylindre creux soumis
à un flux de révolution

Pour résoudre rapidement ce problème, on suppose que le fluage ne dépend que du flux moyen ϕ_m dans la section.

Cette hypothèse nous ramène à la viscoélasticité classique. La solution élastique du cylindre creux soumis à un champ de température $T(r)$ de révolution est connue, voir (29),

$w(r,t)$ peut être assimilée à la déformation thermique. Cette solution élastique s'écrit pour un cylindre à extrémité libre dans un repère (r, θ, z) où z est l'axe du cylindre :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} A(w(r,t))$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu} B(w(r,t))$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} C(w(r,t))$$

où les fonctions A , B , C de fonctions de $W(r,t)$ sont définies par :

$$A(W) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b W r dr - \int_a^r W r dr \right]$$

$$B(W) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 + a^2} \int_a^b W r dr + \int_a^r W r dr - W r^2 \right]$$

$$C(W) = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b W r dr - W$$

Si on admet :

$$\gamma(r,t) = \varphi(r) t$$

et

$$W(r,t) = \alpha \gamma^2 + \beta \gamma$$

la solution du problème avec fluage sous forme opérationnelle s'écrit en fonction de P :

$$\sigma_r(r,P) = \alpha \frac{\bar{E}(P)}{1 - \bar{\nu}(P)} \frac{1}{P^2} A(\varphi^2(r)) + \beta \frac{\bar{E}(P)}{1 - \bar{\nu}(P)} \frac{1}{P} A(\varphi(r))$$

et des relations analogues pour σ_θ et σ_z .

Pour avoir la solution en fonction de r et t il suffit de trouver les originaux de $f_1(P)$ et $f_2(P)$ définis par :

$$f_1(P) = \frac{\bar{E}(P)}{P(1 - \bar{\nu}(P))} \quad f_2(P) = \frac{\bar{E}(P)}{P^2(1 - \bar{\nu}(P))}$$

où $\bar{E}(P)$ et $\bar{\nu}(P)$ sont définis par : (34) et (35).

La solution s'écrit finalement :

$$\sigma_r(r,t) = \beta f_1(t) A(\varphi(r)) + \alpha f_2(t) A(\varphi^2(r))$$

$$\sigma_\theta(r,t) = \beta f_1(t) B(\varphi(r)) + \alpha f_2(t) B(\varphi^2(r))$$

$$\sigma_z(r,t) = \beta f_1(t) C(\varphi(r)) + \alpha f_2(t) C(\varphi^2(r))$$

Avec :

$$f_1(t) = \frac{E F_s}{(1-\nu) F_p} \left[\frac{\lambda - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1} \exp(-\mu_1 t) \right) + \frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \lambda} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_2} \exp(-\mu_2 t) \right) \right]$$

$$f_2(t) = \frac{E F_s}{(1-\nu) F_p} \left[\frac{\lambda - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left(-\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2} \exp(-\mu_1 t) \right) + \frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \mu_1} \left(-\frac{1}{\mu_2^2} + \frac{t}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2^2} \exp(-\mu_2 t) \right) \right]$$

où les coefficients $-\mu_1$ et $-\mu_2$ sont les racines réelles négatives de l'équation :

$$F_p' F_s' p^2 + \left[2 F_s' E_p + \frac{E (F_p' + F_s')}{(1-\nu)} \right] p + \frac{2 E E_p}{1-\nu} = 0$$

dans laquelle

$$F_p' = \frac{2 F_p}{\Phi_{\text{moy}}}$$

$$F_s' = \frac{2 F_s}{\Phi_{\text{moy}}}$$

$$\lambda = \frac{E_p \Phi_{\text{moy}}}{F_p}$$

Exemple numérique.

Le cylindre creux est soumis à un flux maximum Φ_{max} sur sa face intérieure. Ce flux décroît linéairement pour atteindre $0,8 \Phi_{\text{max}}$ sur la face extérieure. On fait le calcul avec les données suivantes :

$$a = 7,5 \text{ cm}$$

$$b = 11,5 \text{ cm}$$

$$E = E_p = 15000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,15$$

$$K = 1/F_s = 1/F_p = 3,5 \quad (\text{MPa.neut./cm}^2 \text{ Ni Dido})^{-1} \cdot 10^{-25}$$

$$\phi_{\max} = 5 \times 10^{-14} \text{ neutrons cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ Ni Dido.}$$

$$W = 2,3 \times 10^{-46} \quad \phi_{\max}^2 t^2 = 0,38 \times 10^{-23} \quad \phi_{\max} t$$

Sur la figure (15), on a représenté la contrainte axiale σ_z en fonction de r pour différents temps d'exposition.

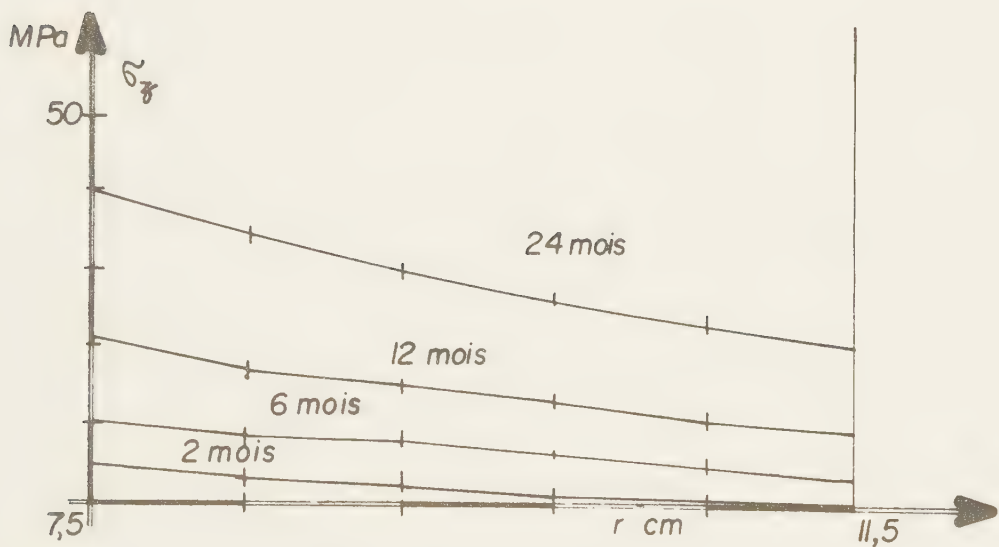


Figure : 15

Contrainte axiale σ_z en fonction du rayon et du temps

III.3.3 - Cylindre creux soumis à un flux dissymétrique.

Dans les réacteurs graphite-gaz, les barres de modérateur sont des cylindres à base hexagonale percés d'un trou longitudinal où vient se loger le combustible. Dans le cas général, on peut estimer que le flux est symétrique; mais quand l'élément modérateur se trouve à côté d'une barre de contrôle^{ou} près du réflecteur, le flux devient dissymétrique. On doit en tenir compte dans le calcul des déformations Wigner. La température dans ce cas est aussi dissymétrique. D'un point de vue technologique, non seulement la connaissance des contraintes est importante dans ce cas, mais il est aussi fondamental de connaître la courbure que prend la barre prismatique, afin de prévoir un jeu suffisant pour le démontage des briques après leur combustion totale.

Dans ce problème, on remplace le flux réel par un flux moyen dans les expressions des modules opérationnels. On suppose, en plus, le matériau à symétrie transversale. Pour la résolution du problème, on assimile la barre prismatique à base hexagonale à un cylindre creux à extrémité libre et à base circulaire.

On recherche la solution du problème à l'aide des transformées de Carson de variable t et de paramètre p . On se place dans un repère de coordonnées cylindriques r, θ, z , où z est l'axe du cylindre. Les données sont la température $T(r, \theta, t)$ et les déformations Wigner $W_t(r, \theta, t)$ et $W_\theta(r, \theta, t)$. Le graphite considéré est à symétrie transversale.

Les relations contrainte-déformation en déformation plane s'écrivent sous forme de transformée

$$\varepsilon_r = \bar{a}_1 \sigma_r - \bar{a}_2 \sigma_\theta + (\alpha_t T + W_t) + \bar{v}_1 (\alpha_e T + W_e)$$

$$\varepsilon_\theta = \bar{a}_1 \sigma_\theta - \bar{a}_2 \sigma_r + (\alpha_t T + W_t) + \bar{v}_1 (\alpha_e T + W_e)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_z = \bar{E}_e \left(\varepsilon_z^t + \frac{\bar{v}_2}{\bar{E}_t} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right)$$

où $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{E}_e, \bar{E}_t, \bar{v}_1$ sont définies par (33) et (25).
En introduisant la fonction d'Airy. Ψ définit par :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right).$$

les conditions de compatibilité qui s'écrivent dans un repère x_1, x_2, x_3 :

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2 \varepsilon_{12,12}$$

deviennent dans le repère r, θ, z , à l'aide de la fonction d'Airy et des relations de comportement.

$$\Delta \Delta \Psi(r, \theta, \rho) = - \frac{\bar{E}_t}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_2} \Delta \left((\alpha_t + \bar{v}_1 \alpha_e) T(r, \theta, \rho) + w_t(r, \theta, \rho) + \bar{v}_1 w_e(r, \theta, \rho) \right)$$

Δ est l'opérateur harmonique.

La fonction Ψ doit vérifier les conditions aux limites.

On peut choisir $\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial n}$ en un point du contour de façon arbitraire. Pour le cercle externe, on peut poser :

$$\Psi = 0$$

$$r = r_2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$$

Sur le cercle intérieur Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$, sont connues à 3 constantes près, donc pour $r=r_1$, on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = [\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r_1(\alpha_2 \cos \theta - \alpha_1 \sin \theta)$$

$$\Psi = \alpha_1 r_1 \cos \theta + \alpha_2 r_1 \sin \theta + \beta$$

Dans l'annexe I, on montre que α_1 , α_2 , β sont déterminés par les conditions de fermeture qui expriment que les déplacements et la rotation sont uniformes dans tout le domaine.

Ces trois conditions s'écrivent dans le cas du cylindre creux à symétrie transversale :

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial r} \right)_{r=r_1} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial e^n}{\partial r} \right)_{r=r_1} d\theta \\ (62) \quad \bar{a}_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \theta \left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} - r_1 \sin \theta \left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right\} d\theta &= - \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \theta \left(\frac{\partial e^n}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} - r_1 \sin \theta \left(\frac{\partial e^n}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right\} d\theta \\ \bar{a}_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \sin \theta \left(\frac{\partial (\Delta \Psi)}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} + r_1 \cos \theta \left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right\} d\theta &= - \int_0^{2\pi} \left\{ \sin \theta \left(\frac{\partial e^n}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} + r_1 \cos \theta \left(\frac{\partial e^n}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right\} d\theta \end{aligned}$$

Avec :

$$e^n(r, \theta, \rho) = \alpha_e T(r, \theta, \rho) + W_e + \bar{v}_1 (\alpha_e T(r, \theta, \rho) + W_e(r, \theta, \rho))$$

Les relations (62) généralisent celles obtenues par Mitchell en 1899 [16] .

Si les données peuvent se mettre sous la forme :

$$w_e(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) M_i(r, \theta)$$

$$w_e(r, \theta, t) = \sum_{i=n+1}^m f_i(t) M_i(r, \theta)$$

$$T(r, \theta, t) = \sum_{i=m+1}^l f_i(t) M_i(r, \theta).$$

Les équations à résoudre qui, sous forme de transformées de Carson, ^{qui} sont linéaires par rapport aux contraintes et aux déformations, permettent d'obtenir la solution générale par superposition :

On cherche les fonctions $\psi(r, \theta)$ qui satisfont aux équations :

$$\Delta \Delta \psi_i(r, \theta) = - \Delta M_i(r, \theta).$$

aux conditions aux limites ainsi qu'aux conditions de fermeture (62).

La recherche des fonctions $\psi_i(r, \theta)$ peut être soit analytique, soit numérique.

La solution s'écrira finalement en désignant par $\mathcal{C}^{-1}$ l'original d'une transformée de Carson :

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, t) = & \sum_{i=1}^n \mathcal{C}^{-1} \left(\frac{\bar{E}_t}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_2} f_i(p) \right) \psi_i(r, \theta) + \\ & + \sum_{i=n+1}^m \mathcal{C}^{-1} \left(\frac{\bar{E}_t \bar{v}_1}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_2} f_i(p) \right) \psi_i(r, \theta) + \sum_{i=m+1}^l \mathcal{C}^{-1} \left(\frac{\alpha_t \bar{E}_t}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_2} + \frac{\alpha_e \bar{E}_t \bar{v}_1}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_2} \right) \psi_i(r, \theta) \end{aligned}$$

$\psi(r, \theta, t)$ permet de calculer $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_{r\theta}$.
La contrainte axiale $\bar{\sigma}_z$ est donnée par :

$$\bar{\sigma}_z = \bar{E}_e (\varepsilon_z^t - \alpha_e T(r, \theta, p) - w_e(r, \theta, p)) + \bar{v}_1 (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)$$

ε_z^t est déterminée par les conditions sur les extrémités :

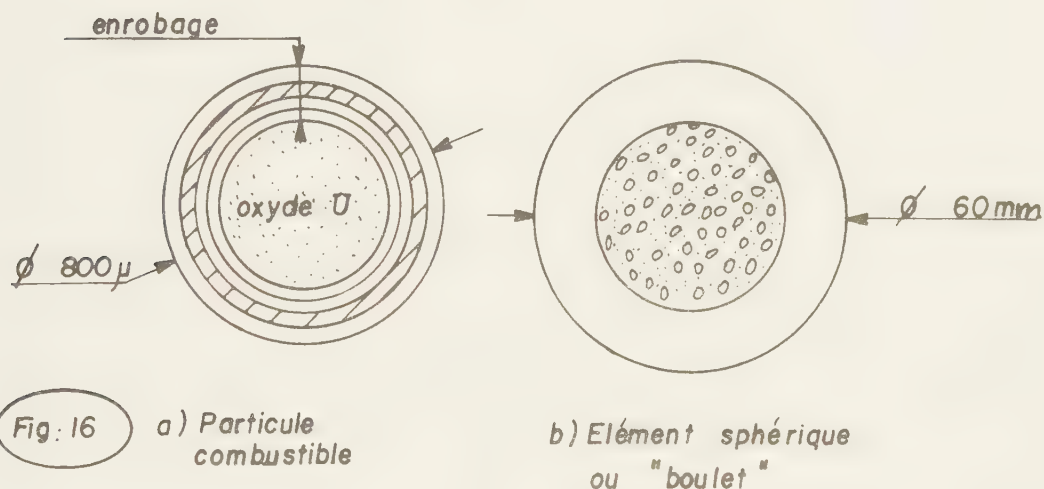
$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\theta = -F(p)$$
$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r^2 dr d\theta = -M(p)$$

F et M sont les efforts résultant appliqués aux extrémités du cylindre.

III.3.4 - Sphère bicouche.

1°) - Position du problème.

L'intérieur de la sphère est formé d'un aggloméré de graphite et de billes multicouches contenant l'oxyde ou du carbure d'uranium (voir figure (16)). Cet aggloméré est entouré d'une couche épaisse de graphite. On suppose que les deux matériaux sont bien imbriqués à l'interface.



Dans cette étude, on admet pour l'aggloméré un comportement du même type que celui du graphite sous irradiation. L'aggloméré subit donc une déformation Wigner et un fluage d'irradiation différents de ceux du graphite. Pour calculer les contraintes dans le boulet sous irradiation, on utilise un modèle sphérique composé de deux milieux viscoélastiques sous irradiation remplissant deux domaines concentriques. L'aggloméré, milieu (1), est soumis à un champ de température $T_1(r, t)$ et un flux de neutrons $\phi_1(r, t)$; le graphite, milieu (2), est soumis à $T_2(r, t)$ et $\phi_2(r, t)$.

Une caractéristique importante des réacteurs à haute température est que le combustible est beaucoup plus réparti dans la masse du modérateur : il en résulte des gradients de flux généralement faibles, aussi bien dans l'aggloméré que dans le graphite modérateur périphérique. On peut donc utiliser les lois de comportement de la viscoélasticité d'irradiation sous forme de transformée de Carson, relation (25), et l'analogie avec l'élasticité qui en résulte.

On rappelle la solution élastique du problème de la sphère soumise à un champ de température, on en déduit la solution générale du problème sphérique bicouche sous forme de transformée de Carson. On donne ensuite dans un cas simple la solution en contrainte et déplacement en fonction du rayon r et du temps t dans l'aggloméré et le graphite.

2°) - Solution du problème.

La solution élastique du problème sphérique de révolution en contrainte et déplacement dans une sphère soumise à un champ de température $T(r)$ s'obtiennent facilement :

$$U(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^r \alpha T(r) r^2 dr + A r + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_r(r) = -2 \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_{r_0}^r \alpha T(r) r^2 dr + A \frac{E}{1-2\nu} - \frac{2}{r^3} B \frac{E}{1+\nu}$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_{r_0}^r \alpha T(r) r^2 dr + A \frac{E}{1-2\nu} + \frac{B}{r^3} \frac{E}{1+\nu} - \alpha T \frac{E}{1-2\nu}$$

où r_0 est rayon intérieur de la sphère.

A , B dépendent des conditions aux limites.

La sphère bicouche ou "boulet" est soumise à la déformation thermique $\propto T(r,t)$ et la déformation Wigner $w(r,t)$. En posant

$$\varepsilon_i^n = \alpha_i T_i + w_i \quad i = 1, 2$$

où l'indice i prend la valeur 1 pour l'aggloméré et 2 pour le graphite périphérique, la solution s'écrit en fonction de r et de ρ :

$$u_i(r, \rho) = \frac{\bar{H}_i}{\bar{I}_i} \frac{F_i(r, \rho)}{r^2} + \bar{A}_i r + \frac{\bar{B}_i}{r^2}$$

$$\sigma_r^i(r, \rho) = -2 \bar{H}_i \frac{F_i(r, \rho)}{r^3} + \bar{A}_i \bar{G}_i - 2 \frac{\bar{B}_i}{r^3} \bar{I}_i$$

$$\sigma_\theta^i(r, \rho) = \bar{H}_i \frac{F_i(r, \rho)}{r^3} + \bar{A}_i \bar{G}_i + \frac{\bar{B}_i}{r^3} \bar{I}_i - \bar{H}_i \varepsilon_i^n$$

avec :

$$\bar{H}_i = \frac{\bar{E}_i}{1-\bar{\nu}_i} \quad \bar{I}_i = \frac{\bar{E}_i}{1+\bar{\nu}_i} \quad \bar{G}_i = \frac{\bar{E}_i}{1-2\bar{\nu}_i}$$

et

$$F_i(r, \rho) = \int_{r_i}^r \varepsilon_i^n(r, \rho) r^2 dr \quad \begin{array}{ll} r_i = 0 & i = 1 \\ r_i = a & i = 2 \end{array}$$

a : est le rayon de sphère d'aggloméré

b : est le rayon extérieur de la calotte de graphite.

$\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ sont déterminés par les conditions aux limites, il faut écrire :

pour $r = 0$ U^1 , σ_r^1 , τ_θ^1 , doivent être finis; il en résulte que $B_1 = 0$.

pour $r = a$:

$$(63) \quad \bar{U}_1(a, p) = \bar{U}_2(a, p)$$

et

$$(64) \quad \sigma_r^1(a, p) = \sigma_r^2(a, p)$$

et pour $r = b$

$$(65) \quad \sigma_r^2(b, p) = 0$$

Les équations (63), (64), (65) permettent de trouver $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{B}_2$.

On obtient :

$$\bar{A}_2(p) = \frac{\frac{\bar{F}_1(a, p)}{a^3 b^3} \left(2 \frac{\bar{I}_2 \bar{H}_1 \bar{G}_1}{\bar{I}_1} + 4 \bar{I}_2 \bar{H}_1 \right) + \frac{\bar{F}_2(b, p)}{a^3 + b^3} (4 \bar{I}_2 \bar{H}_2 + 2 \bar{G}_1 \bar{H}_2)}{2 \bar{I}_2 \left(\frac{\bar{G}_2}{a^3} + \frac{\bar{G}_1 - \bar{G}_2}{b^3} \right) + \frac{\bar{G}_1 \bar{G}_2}{a^3}}$$

$$\bar{B}_2(p) = \frac{\frac{\bar{F}_1(a, p)}{a^3} \left(\frac{\bar{H}_1 \bar{G}_1 \bar{G}_2}{\bar{I}_1} + 2 \bar{H}_1 \bar{G}_2 \right) - 2 \frac{\bar{F}_2(b, p)}{b^3} \bar{H}_2 (\bar{G}_1 - \bar{G}_2)}{2 \bar{I}_2 \left(\frac{\bar{G}_2}{a^3} + \frac{\bar{G}_1 - \bar{G}_2}{b^3} \right) + \frac{\bar{G}_1 \bar{G}_2}{a^3}}$$

La solution en fonction de r et de t s'obtient en recherchant les originaux de $\frac{\bar{H}_i \bar{F}_i}{\bar{I}_i}$, $\bar{H}_i \bar{F}_i$, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{A}_i \bar{G}_i$, $\bar{B}_i \bar{I}_i$, $\bar{H}_i \bar{E}_i^n$.

On cherche la solution en fonction de r et de t avec les hypothèses suivantes :

1 - le fluage transitoire est négligeable. Les modules opérationnels $\bar{E}(p)$ et $\bar{V}(p)$ sont donnés par :

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E} + \frac{\phi_{moy}^i}{P F_i} \quad \bar{V}_i = \frac{V_i}{E_i} + \frac{k_i \phi_{moy}^i}{P F_i} \quad i = 1, 2$$

2 - on suppose que le fluage d'irradiation se fait sans variation de volume. On a alors :

$$k_i = \frac{1}{2} \quad \bar{G}_i = \frac{\bar{E}_i}{1 - 2\bar{V}_i} = \frac{E_i}{1 - 2V_i} \quad i = 1, 2$$

3 - la déformation Wigner est proportionnelle à la dose :

$$w_i = -m_i \phi_i(r) t \quad i = 1, 2.$$

et la température est maintenue constante pendant toute l'irradiation :

$$T_i(r, t) = T_i(r) H(t)$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heavyside définie par :

$$H(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0$$

$$H(t) = 1 \quad \text{si} \quad t > 0$$

La solution est donnée par les relations (68) pour le milieu 1 et par les relations (69) pour le milieu 2. Les fonctions d'espace $\Theta_i(r)$, $\varphi_i(r)$ sont définies par les relations (67) et la fonction d'évolution M_1 , N_1 , M_0 , N_0 , par les relations (66)

Pour expliciter la solution, on obtient comme nouvelles variables :

$$h_i = \frac{E_i (1 - k_i)}{F_i (1 - \nu_i)} ; h_2 = \frac{E_2 (1 - k_2)}{F_2 (1 - \nu_2)} ; l_1 = \frac{E_1 (1 + k_1)}{F_1 (1 + \nu_1)} ; l_2 = \frac{E_2 (1 + k_2)}{F_2 (1 + \nu_2)}$$

et

$$H_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i} \quad I_i = \frac{E_i}{1 + \nu_i} \quad G_i = \bar{G}_i = \frac{E_i}{1 - 2\nu_i} \quad i=1,2.$$

$$x = \frac{2 G_1 H_1 I_2}{e b^3 I_1} ; y = \frac{4 I_2 H_1}{e b^3} ; z = \frac{4 H_2 I_2}{e a^3}$$

$$v = \frac{2 G_1 H_2}{e a^3} ; l = \frac{G_1 G_2 H_1}{e I_1} ; q = \frac{2 G_2 H_1}{e}$$

$$\lambda = \frac{2 (G_2 - G_1) H_2}{e} ; l' = \frac{G_1 G_2 H_1 I_2}{e I_1} ; q' = \frac{2 G_2 H_1 I_2}{e}$$

$$\lambda' = \frac{2 (G_2 - G_1) H_2 I_2}{e}$$

avec :

$$d = \frac{2(G_1 - G_2)}{b^3} + \frac{2 G_2}{a^3} \quad c = \frac{G_1 G_2}{a^3}$$

$$e = d I_2 + c \quad n = \frac{c l_2}{e}$$

On définit les fonctions :

$$\bar{M}_1(\xi, \eta, \lambda, \mu, p) = \frac{(p+\xi)(p+\eta)}{p(p+\lambda)(p+\mu)}$$

$$\bar{N}_1(\xi, \eta, p) = \frac{(p+\xi)}{p(p+\eta)}$$

$$M_0(\xi, \eta, \lambda, \mu, p) = \frac{(p+\xi)(p+\eta)}{(p+\lambda)(p+\mu)}$$

$$N_0(\xi, \eta, p) = \frac{(p+\xi)}{(p+\eta)}$$

En passant aux originaux, on obtient les fonctions d'évolution des contraintes et du déplacement :

$$M_1(\xi, \eta, \lambda, \mu, t) = \left[-\frac{(\xi-\lambda)(\eta-\lambda)}{\lambda^2(\mu-\lambda)} - \frac{(\xi-\mu)(\eta-\mu)}{\mu^2(\lambda-\mu)} + \frac{\xi\eta}{\lambda\mu} t \right. \\ \left. + \frac{(\xi-\lambda)(\eta-\lambda)}{\lambda^2(\mu-\lambda)} \exp(-\lambda t) + \frac{(\xi-\mu)(\eta-\mu)}{\mu^2(\lambda-\mu)} \exp(-\mu t) \right]$$

$$(66) \quad N_1(\xi, \eta, t) = -\frac{\xi-\eta}{\eta^2} + \frac{\xi}{\eta} t + \frac{\xi-\eta}{\eta^2} \exp(-\eta t)$$

$$M_0(\xi, \eta, \lambda, \mu, t) = \left[\frac{\xi\eta}{\lambda\mu} - \frac{(\xi-\lambda)(\eta-\lambda)}{\lambda(\mu-\lambda)} \exp(-\lambda t) \right. \\ \left. + \frac{(\xi-\mu)(\eta-\mu)}{\mu(\mu-\lambda)} \exp(-\mu t) \right]$$

$$N_0(\xi, \eta, t) = \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi-\eta}{\eta} \exp(-\eta t)$$

Les fonctions de répartition spatiales sont définies par :

$$(67) \quad \varphi_i(r) = m_i \int_{r_i}^r \phi_i(r) r^2 dr \quad \text{avec} \quad r_i = 0 \quad i=1$$

$$\theta_i(r) = \alpha_i \int_{r_i}^r T_i(r) r^2 dr \quad \text{si} \quad r_i = a \quad i=2$$

Avec ces notations, on obtient :

$$A_2(t) = x \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(0, l_1, h_1, n, t) - x \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(0, l_1, h_1, n, t)$$

$$+ y \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(0, 0, n, h_1, t) - y \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(0, 0, n, h_1, t)$$

$$+ z \frac{\theta_2(b)}{b^3} M_0(0, 0, n, h_2, t) - z \frac{\varphi_2(b)}{b^3} M_1(0, 0, n, h_2, t)$$

$$+ v \frac{\theta_2(b)}{b^3} M_0(0, l_2, n, h_2, t) - v \frac{\varphi_2(b)}{b^3} M_1(0, l_2, n, h_2, t)$$

$$B_2(t) = l \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(l_2, l_1, n, h_1, t) - l \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(l_2, l_1, n, h_1, t)$$

$$+ q \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(l_2, 0, n, h_1, t) - q \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(l_2, 0, n, h_1, t)$$

$$+ s \frac{\theta_2(b)}{b^3} M_0(l_2, 0, n, h_2, t) - s \frac{\varphi_2(b)}{b^3} M_1(l_2, 0, n, h_2, t).$$

On définit aussi $C_2(t)$, original de $\bar{B}_2 \bar{I}_2$:

$$C_2(t) = l' \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(0, l_1, n, h_1, t) - l' \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(0, l_1, n, h_1, t)$$

$$+ q' \frac{\theta_1(a)}{a^3} M_0(0, 0, n, h_1, t) - q' \frac{\varphi_1(a)}{a^3} M_1(0, 0, n, h_1, t)$$

$$+ s' \frac{\theta_2(b)}{b^3} M_0(0, 0, n, h_2, t) - l' \frac{\varphi_2(b)}{b^3} M_1(0, 0, n, h_2, t)$$

$A_1(t)$ est défini par la relation :

$$A_1(t) = A_2(t) + \frac{B_2(t)}{a^3} - \frac{H_1}{I_1} \left(\frac{\Theta_1(a)}{a^3} N_0(l_1, h_1, t) - \frac{\Psi_1(a)}{a^3} N_1(l_1, h_1, t) \right)$$

Le déplacement U^1 et les contraintes σ_r^1 et σ_θ^1 dans l'aggloméré sont donnés par les relations suivantes :

$$U^1(r, t) = \frac{H_1}{I_1} \frac{\Theta_1(r)}{r^2} N_0(l_1, h_1, t) - \frac{H_1}{I_1} \frac{\Psi_1(r)}{r^2} N_1(l_1, h_1, t)$$

$$+ A_1(r, t) r$$

$$68) \quad \sigma_r^1(r, t) = -2 H_1 \frac{\Theta_1(r)}{r^3} N_0(o, h_1, t) + 2 H_1 \frac{\Psi_1(r)}{r^3} N_1(o, h_1, t)$$

$$+ G_1 A_1(r, t)$$

$$\sigma_\theta^1(r, t) = H_1 \frac{\Theta_1(r)}{r^3} N_0(o, h_1, t) - H_1 \frac{\Psi_1(r)}{r^3} N_1(o, h_1, t)$$

$$+ G_1 A_1(r, t) - H_1 \alpha_1 T_1(r) N_0(o, h_1, t) + m_1 H_1 \Phi_1(r) N_0(o, h, t)$$

Dans le graphite, milieu 2, la solution s'écrit :

$$U^2(r, t) = \frac{H_2}{I_2} \frac{\Theta_2(r)}{r^2} N_0(l_2, h_2, t) - \frac{H_2}{I_2} \frac{\Psi_2(r)}{r^2} N_1(l_2, h_2, t)$$

$$+ A_2(t) r + \frac{B_2(t)}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^2(r,t) = & -2 H_2 \frac{\Theta_2(r)}{r^3} N_0(0, h_2, t) + 2 H_2 \frac{\varphi(r)}{r^3} N_1(0, h_2, t) \\
 & + G_2 A_2(t) - 2 \frac{C_2(t)}{r^3} \\
 \sigma_\theta^2(r,t) = & H_2 \frac{\Theta_2(r)}{r^3} N_0(0, h_2, t) - H_2 \frac{\varphi_2(r)}{r^3} N_1(0, h_2, t) \\
 & + G_2 A_2(t) - \alpha_2 H_2 T_2(r) N_0(0, h_2, t) + m_2 H_2 \Phi_2(r) N_1(0, h_2, t)
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

La formulation des relations contraintes-déformations d'un matériau subissant un fluage sous irradiation, à l'aide des transformées de Carson, permet de donner une solution explicite du problème de la sphère bicouche. La solution qui a été proposée, dans le cas où la déformation Wigner est simplement proportionnelle au temps, peut être reprise dans des cas plus complexes. Le seul problème qui se pose, quand on utilise une résolution à l'aide des transformées de Carson, est comme toujours la recherche des originaux. Dans le cas du graphite, on peut toujours mettre sous forme analytique la déformation Wigner. Aussi la méthode proposée est susceptible d'être généralisée et la formulation explicite de la solution permet d'étudier l'influence des différents paramètres connus ou peu connus, comme par exemple les coefficients de fluage de l'aggloméré.

III.4 - RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

III.4.1. - Résolution par itération de la solution élastique.

Les relations de comportement d'un matériau visco-élastique hétérogène avec vieillissement s'écrivent en faisant apparaître le terme élastique :

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \lambda_{ijkl} \sigma_{kl}(x,t) + \varepsilon_{ij}^f(x,t)$$

(70)

$$\varepsilon_{ij}^f(x,t) = \int_0^t g_{ijkl}(x,t,t') \frac{\partial \sigma_{kl}(x,t')}{\partial t'} dt'$$

Si la déformation diffère, ε_{ij}^f est supposée connue, analogue à une déformation résiduelle quelconque; on se ramène à la résolution d'un problème élastique. Or il est bien connu que la résolution des problèmes élastiques avec des déformations résiduelles peut être étudiée à l'aide de forces fictives de masses et de surfaces que l'on obtient en écrivant les équations de l'équilibre et les conditions aux limites.

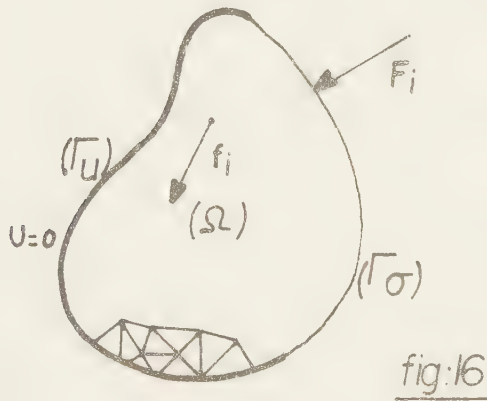
Comme la déformation résiduelle ε_{ij}^f dépend en fait des contraintes, on résout le problème par itérations successives. Nous avons utilisé cette méthode pour étudier les contraintes dans un élément combustible nucléaire composé de trois cylindres coaxiaux pouvant être interactifs. HEAD et SOCKALINGAM^[7], d'une part, et KASTEN^[11] et ses collaborateurs de l'autre, ont étudié le cylindre creux à l'aide de cette même méthode. L'application de la méthode des éléments finis à la viscoélasticité que nous développons au paragraphe suivant, est une autre illustration de cette méthode d'itération de la solution élastique.

III.4.2 - Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de viscoélasticité d'irradiation.

1 - Principe de la méthode.

On commence par rappeler très rapidement les fondements de la méthode des éléments finis dans le cas où le matériau a des déformations non élastiques ou résiduelles. On étend ensuite cette méthode, en calculant les termes dus au fluage par itération. On utilise ici les déplacements comme inconnues ("méthode des déplacements").

Considérons un solide Ω soumis à des forces massiques f_i et à des forces de surface F_i sur une partie de sa frontière Γ_f . Sur le reste de la frontière Γ_u les déplacements sont donnés nuls pour simplifier.



Ce solide est soumis à des déformations non élastiques ϵ_{ij}^n connues qui peuvent être d'origine "Wigner" ou autre. La déformation totale ϵ_{ij}^t s'écrit:

$$\epsilon_{ij}^t = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^n$$

où ϵ_{ij}^e est la déformation élastique.

La relation entre contraintes et déformations élastiques s'écrit

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} (\epsilon_{kl}^t - \epsilon_{kl}^n)$$

La relation déformation totale et déplacement est :

$$(71) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + v_{j,i})$$

Les équations à résoudre pour le domaine (Ω) sont les suivantes :

$$(72) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j &= F_i & \text{sur } \Gamma_r \\ u_i &= 0 & \text{sur } \Gamma_u \end{aligned}$$

En tenant compte de (70) et (71), l'équation d'équilibre (72) s'écrit :

$$\lambda_{ijke} (v_{k,e} - \varepsilon_{ke,j}^n) + f_i = 0$$

Résoudre ce problème revient à minimiser l'expression :

$$E_p(\bar{u}_i) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \lambda_{ijke} \bar{u}_{k,e} \bar{u}_{i,j} dv - \int_{(\Omega)} \lambda_{ijke} \varepsilon_{ke,j}^n \bar{u}_{i,j} dv - \int_{(\Omega)} f_i \bar{u}_i dv - \int_{\Gamma_r} F_i \bar{u}_i ds$$

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine en petit élément simple, par exemple des tétraèdres dont la juxtaposition représente le solide. D'autre part, on choisit dans chaque tétraèdre, des déplacements ayant une forme analytique donnée compatible avec les liaisons imposées. Le cas le plus simple revient à prendre $\bar{u}_i$ linéaire à l'intérieur de chaque tétraèdre; il en résulte des déformations et des contraintes constantes dans chaque élément et les seules inconnues du problème sont alors les déplacements aux quatre noeuds du tétraèdre.

2 - Problème plan.

Dans le cas de la déformation ou contrainte plane, la partition du domaine se fait généralement en triangles.

En choisissant comme inconnues les déplacements (u_i, v_i) , (u_j, v_j) , (u_m, v_m) des noeuds i, j, m , les déplacements d'un point (x, y) s'écrivent :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \}$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \}$$

avec :

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

et Δ est l'aire du triangle i, j, m .

La déformation est constante dans chaque triangle, soit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} B \cdot \{\delta\}$$

où δ est la matrice colonne des déplacements des noeuds i, j, m

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

et B est une matrice de définition géométrique du triangle :

$$B = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

En discrétisant les intégrales de la fonctionnelle $E_p(\bar{u}_i)$,
l'expression à minimiser devient, utilisant la notation matricielle :

$$E^p = \sum_{q=1}^N \left(\frac{1}{2} \{\delta_q\}^T \cdot B_q^T \cdot D \cdot B_q \cdot \{\delta\} \cdot t \cdot \Delta_q - \{\delta_q\}^T \cdot B_q \cdot D \cdot \{\varepsilon_q^u\} \cdot t \cdot \Delta_q - \{\delta_q\}^T \cdot F_q^r \cdot t \right)$$

t est l'épaisseur des éléments prismatiques à base triangulaire,
 N est le nombre totale de triangles.

Δ_q est la surface du triangle q .

D est la matrice de compliance élastique.

Dans le cas de la déformation plane d'un matériau isotrope, on a :

$$\{\varepsilon\} = D \{\sigma\}$$

où D est défini par :

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/1-\nu & 0 \\ \nu/1-\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

F^r représente les résultantes aux noeuds i, j, m des forces de masses et de surfaces appliquées au triangle.

$B_q^T \cdot D \cdot B_q$ est appelé matrice de rigidité élémentaire du triangle.
En introduisant les grandeurs globales, E_p prend la forme :

$$E^p(\delta) = \frac{1}{2} \delta \cdot K \cdot \delta - \delta \cdot B \cdot D \cdot \varepsilon^u - \delta^T \cdot F^r$$

K est la matrice de rigidité globale de la structure.

Minimiser $E^p(\delta)$ revient à résoudre :

$$K \delta = B^T \cdot D \cdot \varepsilon^u + F^r$$

qui est une équation à $2N$ inconnues (N nombre de noeuds), en tenant compte des conditions imposées sur les déplacements.

3 - Application à la viscoélasticité d'irradiation.

En se rappelant que la déformation totale en visco-élasticité s'écrit :

$$(73) \quad \varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \alpha_{ij} T + w_{ij}$$

l'équation à résoudre par la méthode des éléments finis devient :

$$K S = F^v + B^T D \cdot (\{w\} + \{\theta\}) + B^T D \cdot \{f\}$$

$\{w\}$, $\{\theta\}$, $\{f\}$ sont les vecteurs colonnes des déformations globales Wigner, thermique et de fluage.

Dans le cas de la déformation plane, on a pour un matériau isotrope :

$$\{w\} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} w \\ w \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{\theta\} = \alpha(1+\nu) \begin{Bmatrix} T \\ T \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_x + \nu f_z \\ f_x + \nu f_z \\ f_{xy} \end{Bmatrix}$$

f_x , f_y , f_z , f_{xy} sont les déformations de fluage du matériau si on néglige le fluage transitoire, on a :

$$(74) \quad \begin{aligned} f_x &= \int_0^t \phi \left[\frac{\sigma_x}{F} - \frac{k}{F} (\sigma_y + \sigma_z) \right] dt \\ f_y &= \int_0^t \phi \left[\frac{\sigma_y}{F} - \frac{k}{F} (\sigma_x + \sigma_z) \right] dt \\ f_z &= \int_0^t \phi \left[\frac{\sigma_z}{F} - \frac{k}{F} (\sigma_x + \sigma_y) \right] dt \\ f_{xy} &= \int_0^t \phi \cdot \frac{2 \cdot (1+k)}{F} \sigma_{xy} dt \end{aligned}$$

Les termes $\{w\}$, $\{\theta\}$, F^r , $\{f\}$ de l'équation (74) dépendent en fait du temps. On préfère alors résoudre cette équation par accroissement, on a alors :

$$(75) \quad K \Delta S = \Delta F + B^T \cdot D \cdot (\{\Delta w\} + \{\Delta \theta\}) + B \cdot D \cdot \{\Delta f\}$$

Pour respecter l'hypothèse initiale de la linéarité des déplacements, on donne à $\{\Delta w\}$ et à $\{\Delta \theta\}$ leur valeur moyenne dans chaque triangle. Le terme de fluage $\{\Delta f\}$ qui dépend des contraintes est calculé par itération successive après discrétisation des relations (72). La résolution de l'équation (75) est faite par la méthode de relaxation de GAUSS-SEIDEL. L'annexe II fournit l'organigramme de l'ensemble des opérations à effectuer.

CHAPITRE IV

INTRODUCTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES METAUX SOUS IRRADIATION

IV.1. - Interaction entre particules élémentaires et réseau cristallin.

IV.1.1.) Différents types de particules élémentaires.

On sait que les propriétés mécaniques d'un métal ou d'un alliage dépendent directement de la présence de défauts ponctuels, lacunes et intersticiels et des défauts linéaires que sont les dislocations.

On se propose de décrire comment ces défauts peuvent être produits par irradiation. On peut distinguer trois types de particules élémentaires.

L'irradiation par les neutrons est le premier type ; elle nous intéresse en premier lieu en raison de son importance dans la technologie nucléaire. Le neutron ne porte pas de charge et ne subit donc pas de perte d'énergie par interaction de Coulomb. Par contre il peut y avoir interaction entre le neutron et un atome avec transfert d'énergie : si on considère que l'interaction est une collision élastique, l'énergie totale reste inchangée tandis que dans une collision non élastique une partie de l'énergie initiale est transformée en énergie thermique ou en radiation électromagnétique.

Dans l'interaction des particules chargées (électron, mesons, protons, deutrons, etc...) avec la matière s'introduisent les forces de Coulomb en plus de la collision élastique. A grande vitesse les particules commencent par perdre leur énergie en excitant les électrons du réseau, ensuite c'est la collision élastique qui devient prépondérante.

Les rayons γ constituent le troisième type de particules parce que l'interaction se produit aussi bien avec l'électron qu'avec le noyau. Les mécanismes et les effets de ces radiations sont complexes et variés, on ^{ne} ~~s' dans la suite à ce type de radiation.~~

IV.1.2.) Processus de déplacement d'atome.

Soit une particule incidente A d'énergie E qui vient bombarder l'atome B d'un réseau cristallin et lui cède l'énergie E_p . Si E_p est supérieur à E_d l'atome B est déplacé. E_d est le seuil énergétique du déplacement. Par définition on peut dire que la probabilité $P(E_p)$ de déplacement de B est 1 si $E_p \gg E_d$, et nulle si $E_p < E_d$. Voir figure 17.

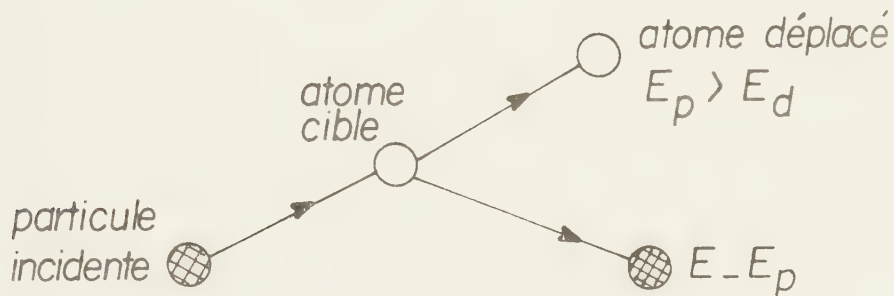


fig: 17

L'atome B va à son tour devenir particule incidente et viendra heurter un atome C ; il ne s'immobilisera que lorsque son énergie sera inférieure à E_d .

IV.1.3.) Collision de remplacement.

Si $E_r < E_p < E_d$ l'atome A remplace l'atome B.

E_r est le seuil énergétique de remplacement. On a généralement :

$$E_r \approx \frac{E_d}{10}$$

IV.1.4.) Section efficace.

La probabilité qu'une quantité d'énergie soit transférée d'une particule incidente à un autre atome peut s'exprimer par une surface appelée section efficace.

Si E est l'énergie de la particule incidente et E_p l'énergie transférée, la quantité

$$\frac{d\sigma(E, E_p)}{dE_p} dE_p$$

exprime la probabilité pour qu'une particule incidente transfère une quantité d'énergie comprise entre E_p et $E_p + dE_p$.

La section efficace du déplacement est :

$$\sigma_d(E) = \int_0^{E_p^{\max}} P(E_p) \frac{d\sigma(E, E_p)}{dE_p} dE_p$$

où $P(E_p)$ est nulle pour $E_p < E_d$ et égale à 1 pour $E_p > E_d$,
on a donc

$$\sigma_d(E) = \int_{E_d}^{E_p^{\max}} \frac{d\sigma(E, E_p)}{dE_p} dE_p$$

On peut montrer que l'énergie maximum transférée $E_p^{\max}$
est pour les particules non chargées

$$(76) \quad E_p^{\max}(E) = \frac{4 M_1 M_2 E}{(M_1 + M_2)^2}$$

où E et M_1 sont l'énergie et la masse de la particule incidente et M_2 est la masse de l'atome cible.

Pour des particules chargées on doit tenir compte de leur charge ; pour les électrons, la relation (76) devient :

$$E_p^{\max}(E) = 2 \frac{(E + 2 m_e c^2) E}{M_2 c^2}$$

où m_e est la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière.

IV.1.5.) Parcours_moyen_libre.

Soit v_1 la vitesse de la particule incidente
 n_0 le nombre d'atome par unité de volume dans le cristal.

Le nombre de collision par unité de volume pendant le temps dt est :

$$N_c = v_1 \cdot \sigma \cdot n_0 \cdot dt$$

où σ est la section efficace pour qu'il y ait collision.

Si $N_c = 1$ on définit

$$\lambda = \frac{1}{n_0 \sigma} = v_1 dt$$

λ est la distance moyenne parcourue avant la première collision ou trajet moyen libre.

Si on se réfère au déplacement et non à la collision, le trajet moyen avant le premier déplacement λ_d sera :

$$\lambda_d = \frac{1}{n_0 \sigma_d}$$

où σ_d est la section efficace de déplacement.

IV.1.6.) Nombre d'atomes déplacés.

Le nombre d'atomes déplacés est important à connaître car c'est de lui que va dépendre les effets de l'irradiation.

Si $\phi.t.$ est le flux intégré, et

$$n_p = \phi.t. n_0 \sigma_d$$

est le nombre d'atomes primaires déplacés par les particules incidentes.

Si on tient compte des déplacements provoqués par les atomes primaires, on a

$$n_d = n_p \cdot \bar{\nu}$$

$\bar{\nu}$ est le nombre moyen de déplacements secondaires, tertiaires, etc., provoqués par un atome primaire. Une approximation de $\bar{\nu}$ est donnée par

$$\bar{\nu} \approx \frac{E_p}{2 E_d}$$

IV.1.7.) Limitation et raffinement de la théorie.

Ne pouvant pas expliquer certains effets de l'irradiation à l'aide du mécanisme de déplacement d'atomes qu'on vient de décrire, les physiciens ont introduit de nouveaux concepts : la

particule incidente a une action sur un groupe d'atomes au lieu d'avoir une interaction avec un atome unique. Ce sont les phénomènes de pic ou épi.

On distingue trois types de pic : le pic thermique correspond à une brusque et courte élévation de température ; le pic de déplacement est décrit comme une zone lacunaire entourée d'une concentration élevée d'intersticiels ; le pic plastique est le résultat du pic thermique, l'élévation de température provoque des contraintes thermiques suffisamment élevées pour entraîner des déformations plastiques.

Tous ces phénomènes sont à l'heure actuelle au stade de recherche : il convient de ne pas s'y étendre davantage.

Pour une étude plus détaillée sur l'interaction d'une particule élémentaire et d'un matériau cristallin il convient de consulter [1] , [3] , [40] .

IV.2 - Effets de l'irradiation sur les propriétés mécaniques des métaux.

De multiples travaux rassemblés dans (1) , (40) , (41) (42) , (43) ont été faits sur le sujet. Après une irradiation donnée l'échantillon de métal est soumis aux essais mécaniques classiques afin de déterminer les variations de ^{son} module d'Young, sa limite d'écoulement, ^{et} sa ductilité. La littérature est aussi très abondante sur les interprétations physiques de ces modifications à partir de la théorie des dislocations. Dans ce paragraphe on ne s'intéressera pas à ce côté microscopique, on concentrera plutôt notre attention sur les modifications des propriétés mécaniques dues à l'irradiation.

L'étude la plus complète de ces problèmes se trouve à notre connaissance dans le livre de BILLINGTON et CRAWFORD (1) .

L'irradiation a un effet analogue sur les propriétés mécaniques de la plupart des métaux.

La comparaison des courbes efforts-déformations d'un matériau irradié et non irradié rend compte de la plupart des effets de l'irradiation. La fig. (18) montre une courbe type pour un métal

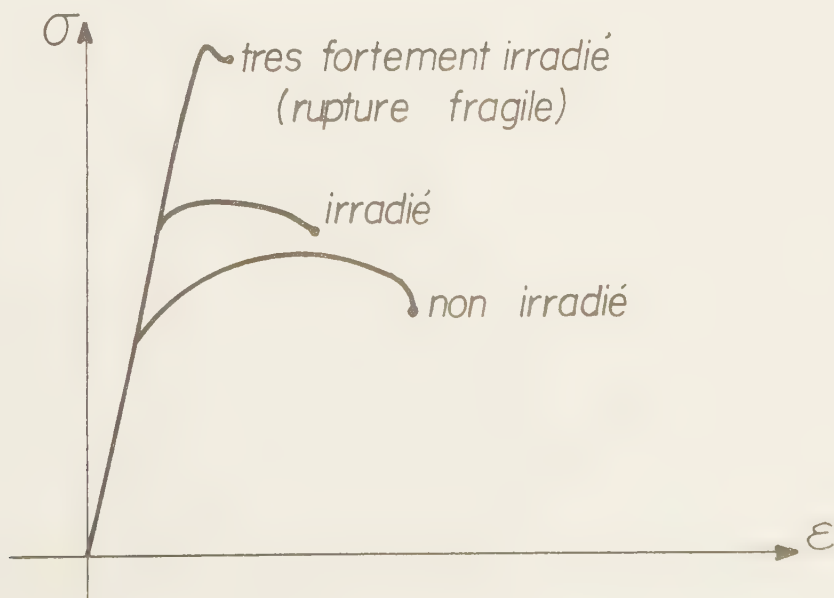


fig:18

Courbe effort déformation :
Effet de l'irradiation

Les modifications des propriétés mécaniques d'un métal après irradiation, se résument ainsi :

- 1°) Le cisaillement critique du monocristal croît fortement avec la dose.
La dépendance de cisaillement critique de la température croît avec la dose.
- 2°) L'irradiation augmente la limite d'écoulement de la plupart des métaux ; c'est une conséquence de la précédente. On dit que le métal subit un durcissement d'irradiation. Ce durcissement est isotrope et ne se cumule pas avec l'écrouissage mécanique.
- 3°) L'irradiation diminue la ductilité, ce qui signifie que la zone de déformation plastique avant rupture est diminuée ; elle peut même être réduite à zéro ; le matériau devient alors fragile.
- 4°) Le taux de l'écrouissage est fortement réduit par l'irradiation.

IV.3. - Comportement sous irradiation et contrainte des métaux.

IV.3.1.) Déformation sous irradiation.

On sait que le bombardement par des particules élémentaires d'un matériau à structure cristalline provoque des déplacements d'atomes. L'ensemble de ces défauts créés se traduit à l'échelle macroscopique par des déformations du matériau : qu'on appellera, comme pour le graphite, déformation Wigner.

Les physiciens distinguent pour les métaux deux types de déformations.

1°) Le gonflement

Pour beaucoup de matériaux l'irradiation provoque une augmentation de volume appelée gonflement. Il en est ainsi des aciers, du Beryllium, l'uranium, etc... Le gonflement est dû généralement à la création de bulles remplies de gaz de fission ; c'est le Beryllium et l'Uranium qui connaissent le gonflement le plus important. Voir [41]. Le gonflement peut être dû aussi à une agglomération de lacunes en amas formant des "cavités" microscopiques dans la matière.

2°) La croissance

Ce phénomène n'affecte que les matériaux anisotropes : lors du processus de cascade les atomes déplacés se réarrangent en boucles de dislocations dont les vecteurs de Burghers sont orientés dans certaines directions cristallographiques, provoquant un véritable déplacement de matière. Ce phénomène a été d'abord découvert pour l'Uranium, ensuite pour tous les métaux anisotropes. Par exemple, si on prend un petit cylindre à base circulaire taillé dans un monocristal d'uranium, après irradiation, le cylindre s'allonge et sa base devient une ellipse.

Dans le polycristal il se développe des contraintes élastiques intergranulaires qui assurent la compatibilité des déformations dues à la croissance de chaque monocristal.

Les déformations Wigner dépendent essentiellement de la dose de neutrons, de la température et de la nature du matériau. Dans les calculs de structures, ces déformations sont supposées connues.

IV.3.2.) Fluage sous irradiation

1°) Faits expérimentaux

L'irradiation sous contrainte peut modifier totalement les déformations Wigner observées en absence de contrainte. Il peut s'introduire des déformations supplémentaires liées à la contrainte et fonctions du temps : c'est le phénomène de fluage. Dans ce § on étudie les modifications qu'apporte l'irradiation sur le comportement au fluage des matériaux.

A l'heure actuelle les résultats connus sur le fluage sous irradiation sont assez éparés, généralement descriptifs et souvent contradictoires. D'autre part en raison des retombées technologiques, beaucoup de travaux ne sont pas publiés ; un travail de synthèse dans ce domaine se heurte à beaucoup de difficultés.

ANDRADE (35) a le premier révélé qu'en irradiant un monocristal de Cadmium par des particules alpha il obtenait une augmentation de 5 fois de la vitesse de fluage, ce qui laissait prévoir un effet analogue pour les autres métaux. Dans une première phase ce résultat d'ANDRADE n'a pas été confirmé ; l'irradiation à des doses relativement faibles, de l'ordre 10^{12} n/cm^2 du cuivre, de l'acier inoxydable, du zirconium, etc... a montré plutôt une légère diminution des vitesses de fluage ; pour d'autres métaux les auteurs ont noté une légère augmentation. On pourra trouver dans le livre de BILLINGTON et CRAWFORD (1), page 162, une liste des métaux étudiés avec les effets observés et les références s'y rapportant.

A partir de modèle théorique plusieurs auteurs, dont SCHOEK (36) ont pensé que l'irradiation avait pour effet d'augmenter la vitesse de fluage thermique, ce qui conduit à écrire pour la vitesse de fluage sous irradiation e :

$$e = e_{th} (1 + f)$$

où e_{th} est la vitesse de fluage hors irradiation ou thermique et f une fonction de plusieurs paramètres dont le flux. SCHOEK à partir d'un modèle basé sur la montée des dislocations a montré que f est proportionnelle au flux.

Mais l'irradiation sous contrainte peut provoquer un fluage très important alors que le fluage thermique à la même température est tout à fait négligeable. C'est le cas du graphite que nous avons étudié précédemment. On dit alors que ce fluage est induit par l'irradiation ou simplement fluage d'irradiation ; à l'heure actuelle il semble qu'on puisse admettre avec HESKETH (62) la superposition du fluage thermique et du fluage d'irradiation : on a donc

$$e = e_{th} + e_{ir}$$

Le fluage d'irradiation a été constaté sur plusieurs métaux et alliages : l'uranium, le zirconium, le beryllium, le nickel, le titane et les aciers inoxydables. (44), (46), (47), (55) (64). Mais la plupart de ces résultats sont qualitatifs, et il faut toujours avoir à l'esprit qu'ils ne sont valables que pour la nuance du métal ou alliage utilisés et dans la zone de température où ils ont été irradiés. Une modification même infime de la composition ou du traitement antérieur peut modifier totalement les conclusions sur le fluage.

2°) Nature des lois de fluage

a) fluage thermique.

On ne reprendra pas ici la théorie du fluage des métaux.

Rappelons que dans une expérience de fluage on étudie la déformation en fonction du temps pour une contrainte constante. On distinguera généralement une partie où la vitesse de déformation est décroissante, appelée fluage primaire, suivie d'une droite où cette vitesse est constante appelée fluage secondaire. La troisième et dernière phase, appelée fluage tertiaire, est caractérisée par une accélération de vitesse du fluage et se termine par la rupture.

Au point de vue des applications c'est le fluage secondaire qui est le plus important, la loi unidimensionnelle qui le régit est connue sous le nom de loi de Norton, valable pour les métaux,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A \sigma^n$$

Pour les matériaux qui admettent une relation linéaire entre contrainte et déformation la théorie de la viscoélasticité linéaire que nous avons rappelée au 1er chapitre permet de tenir compte à la fois du fluage primaire et secondaire et de l'histoire des sollicitations du matériau.

b) fluage d'irradiation

Les lois du fluage sous irradiation sont du même type que celles du fluage thermique. Mais les vitesses de fluage sont toutes proportionnelles aux flux de neutrons. On pourra, comme pour le graphite, introduire les vitesses par rapport à la dose au lieu des vitesses par rapport au temps en tenant compte de la relation

$$\gamma = \phi t$$

On peut distinguer comme pour le fluage thermique deux types de lois.

Fluage non linéaire

La loi unidimensionnelle du fluage secondaire s'écrit

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A \sigma^n \phi$$

A dépend de la température et Φ est le flux. Si on admet comme SCHOEK (36) que le fluage d'irradiation est une accélération du fluage thermique l'exposant α sera égal à l'exposant n de la loi de Norton.

Dans un travail plus récent TESK et LI (39) à partir d'un modèle basé sur la montée de dislocations vis à l'aide du flux de lacunes et d'intersticiels, créés par l'irradiation, propose pour le fluage sous irradiation :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A \sigma^n \exp(-Q/RT) + B \sigma^\alpha \Phi$$

le 1er terme représente le fluage thermique et le second le fluage d'irradiation ; leur modèle les conduit à une relation entre les exposants n et α :

$$n = \alpha + 3$$

Fluage linéaire
— · — · — · — · — · — ·

On a vu, au chapitre II, que le modèle rhéologique de Burghers permet de bien représenter le fluage linéaire. Il semble que le graphite ne soit pas le seul à avoir un fluage viscoélastique HESKETH (59) suivi par WOLF (60) proposent aussi le modèle de Burghers pour rendre compte du fluage de certains matériaux. HYATT (57) a vérifié expérimentalement la validité de cette loi pour des alliages de fer à 310°C pour des doses de l'ordre 10^{22} n/cm²

IV.3.3.) Mécanismes responsables de la modification du fluage sous irradiation

Dans la littérature les études sur le fluage sous irradiation sont extrêmement liées à celles du mécanisme qui le provoque. Il est utile de connaître les mécanismes microscopiques que les physiciens avancent pour expliquer les modifications du fluage sous irradiation.

A) Mécanismes responsables de l'augmentation du fluage.

— — — — —

On distingue généralement trois mécanismes. On les décrit rapidement sans essayer de les rapporter à un matériau particulier car le problème est à l'heure actuelle largement débattu par les différents chercheurs. Ces mécanismes peuvent être actifs

1°) Glissement simple de dislocations

Sous l'action des contraintes les dislocations glissent dans leur plan. C'est ainsi que KELLY (40) explique le fluage du graphite ; ce matériau possède une densité de dislocations très élevée dont les vecteurs de Burghers sont dans le plan basal. L'importance de ce phénomène dans le graphite tient à la nature bidimensionnelle du réseau de dislocations ; dans les métaux, les dislocations se trouvant dans des plans différents forment des barrières à leur glissement réciproque.

2°) Fluage par montée

Ce type de mécanisme a été discuté surtout par SCHOEK (36) , WEERTMAN (37) et HESKETH (38). En faisant le bilan des lacunes et des atomes interstitiels produits par l'irradiation et captés par les dislocations, ces auteurs proposent des modèles qui les conduisent à des relations entre le taux de fluage et la contrainte. Par une démarche un peu différente, MARTIN et POIRIER (45) essayent de relier le fluage sous irradiation aux déformations créées par l'irradiation en absence de contrainte et au fluage thermique.

3°) Fluage par croissance différentielle

On sait que l'irradiation provoque la croissance des monocristaux anisotropes. Dans le polycristal ces variations dimensionnelles du monocristal entraînent des contraintes élastiques intergranulaires pour assurer la compatibilité des déformations totales. Si ces contraintes sont suffisamment élevées il y a écoulement plastique. L'application d'une contrainte extérieure accélère le phénomène et il y a fluage. Ces effets ont été prédits et observés par ROBERTS et COTRELL (44) pour l'uranium. ENGLANDER et THOMAS de MOMPREVILLE (47) ont vérifié expérimentalement la relation entre le taux de fluage et le taux de combustion de l'uranium.

Pour les métaux isotropes un phénomène analogue à la croissance des monocristaux peut expliquer le fluage d'irradiation dans certaines conditions. Dans la zone du pic thermique et plastique due à l'irradiation en absence de contrainte, il se crée de micro-boucles de dislocations lacunaires et interstitielles distribuées de façon isotrope. L'introduction d'une contrainte sous irradiation détruit l'isotropie structurelle et fait basculer les vecteurs de Burghers de certaines boucles vers des directions où ils sont plus stables, créant ainsi un véritable transport de matière. BRENAC et LETEURTRE (48) ont étudié ce type de mécanisme et PONSROYE (49) le propose pour expliquer ses résultats d'expérience de fluage sous irradiation du tungstène.

B) Mécanismes responsables de la diminution du fluage.

— — — — —

On sait que pour beaucoup de métaux l'irradiation provoque plutôt une légère diminution des vitesses de fluage thermique. Ce phénomène est généralement expliqué par l'augmentation du nombre de défauts ponctuels, lacunes et interstitiels, ou d'amas de défauts créés par l'irradiation. Ces défauts constituent autant de barrières ou d'ancrages pour le glissement ou la montée des dislocations, mécanismes que l'on invoque généralement pour expliquer le fluage thermique, voir FRIEDEL (64), KENNEDY (65).

IV.3.4.) Forme générale de la loi de comportement.

Les résultats expérimentaux ainsi que les modèles physiques ont conduit généralement à des lois de fluage unidimensionnelles sous irradiation. Afin de pouvoir utiliser ces résultats en vue des applications, il est utile de présenter sous une forme globale le comportement des matériaux sous irradiation.

D'une façon générale on admet que le tenseur de déformation totale d'un matériau sous irradiation et contrainte est la somme des tenseurs des déformations élastique, Wigner, et de fluage thermique et d'irradiation :

$$\varepsilon_{ij}^t(t) = \varepsilon_{ij}^e(\sigma_{ij}(t)) + w_{ij}(\gamma(t)) + \int_{ij}^{ther} [\sigma_{ij}(t')]_0^t + \int_{ij}^{irr} [\sigma_{ij}(t'), \gamma(t')]_0^t$$

le crochet $\int_0^t$ indique qu'il s'agit d'une fonctionnelle.

- 1 - Déformation élastique

Pour un matériau anisotrope, on a

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_{ijkl} \sigma_{kl}$$

les coefficients λ_{ijkl} de la matrice de compliance élastique peuvent dépendre de la dose.

- 2 - Déformation Wigner

Le tenseur de déformation Wigner peut se décomposer en tenseur sphérique $g\delta_{ij}$ (gonflement) et en déviateur c_{ij} (croissance) correspondant à des mécanismes différents que l'on a décrit :

$$w_{ij} = g\delta_{ij} + c_{ij}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Pour chaque matériau, le tenseur de déformation Wigner doit être déterminé soit expérimentalement, soit à partir de théories physiques.

- 3 - Déformation de fluage

Pour expliciter les termes de fluage thermique ou d'irradiation on doit distinguer les cas du fluage linéaire et non linéaire.

-a- Fluage linéaire : on a rappelé au 1er chapitre la théorie de la viscoélasticité linéaire qui s'appliquera au fluage thermique linéaire. Dans le 2ème chapitre on a développé la théorie de la viscoélasticité des corps rhéologiquement simples qui

-b- Fluage non linéaire : les théories tenant compte de l'histoire de chargement ne sont pas très développées et n'ont surtout pas de supports expérimentaux suffisants, ni pour le fluage thermique et encore moins pour le fluage d'irradiation ; on ne doit donc pas retenir la formulation à l'aide d'une fonctionnelle.

On propose d'appliquer les travaux sur le fluage thermique des métaux de HOFF (50) ODQVIST (51) et RABOTNOV (52). On se limitera ici au fluage secondaire. On peut proposer la loi d'ODQVIST pour généraliser au cas tridimensionnel la loi unidimensionnelle de Norton, voir HOFF (50); on obtient pour un matériau isotrope, pour le fluage thermique :

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = c S_2^m s_{ij}$$

et pour le fluage d'irradiation, on obtient :

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\gamma} = c' S_2^\beta s_{ij}$$

où s_{ij} est le déviateur des contraintes
 S_2 est le deuxième invariant du tenseur de contrainte.

L'exposant m de la loi d'ODQVIST est relié à l'exposant n de la loi de NORTON par :

$$m = \frac{n-1}{2}$$

pour le fluage thermique ; pour le fluage d'irradiation, on aura :

$$\beta = \frac{\alpha-1}{2}$$

IV.3.5.) Conclusion sur le fluage sous irradiation des métaux.

Au stade actuel des recherches il n'est guère possible de présenter une théorie complète sur le fluage sous irradiation des métaux. Les résultats expérimentaux sont rares, incomplets, et très souvent qualitatifs. Les approches théoriques par des modèles basés sur la théorie des dislocations sont plus nombreuses mais sont encore très discutées. Nous avons néanmoins cherché à présenter les grandes lignes du phénomène du fluage sous irradiation ; du point de vue mécanique on peut dégager les conclusions suivantes :

1°) Quand la vitesse de fluage des métaux augmente sous irradiation, il se superpose en fait au fluage thermique un fluage d'irradiation dû à l'effet combiné de l'irradiation et des contraintes.

2°) Les vitesses par rapport au temps de ce fluage d'irradiation sont proportionnelles au flux de particules.

3°) Les lois qui régissent le fluage d'irradiation sont analogues à celles qui régissent le fluage thermique : il en résulte que, comme pour le graphite, les calculs de structures de réacteurs tels que gaines de combustibles ou éléments combustibles tenant compte du fluage d'irradiation sont analogues au calcul du fluage thermique, si le flux réel peut être remplacé par un flux moyen constant dans la structure. Dans le cas contraire, c'est à dire quand le flux n'est pas uniforme dans la structure, il s'introduit dans les relations de comportement définissant le fluage des fonctions des coordonnées spatiales qui compliquent la résolution du problème.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) D.S. BILLINGTON et J.H. CRAWFORD
Radiation Damage in Solids.
Princeton University (1961).
- (2) J.E. BLOCKLEHURST et J.T. LYNAM
Poisson's Ration of Reactor Graphite and the Effect
of Irradiation.
Rapport T.R.G. 9016 (1964).
- (3) L.T. CHADDERTON
Radiation Damage in Crystals.
Methuen (1965).
- (4) S.W. EDELSTEIN
Acta Mechanica, vol.8, p.174, (1969).
- (5) P. GERMAIN
Mécanique des Milieux Continus.
Masson (1962).
- (6) C. HUET
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, tome I,
n°5, p.237, (1967).
- (7) J.H. HEAD et K.C. SOCKALINGAM
Mech. Eng. Sc. déc. (1968).
- (8) R.V. HESKETH
Phil. Mag., vol.11, p.929, (1965).
- (9) R.V. HESKETH
Phil. Mag., vol.11, p.917, (1965).
- (10) G.M. JENKINS et D.R. STEPHEN
Carbon, vol.4, p.67, (1966).
- (11) P.R. KASTEN et al
Nuclear Engineering and Design, vol.9, p.151, (1969)

(12) C.R. KENNEDY

Creep of Graphite under Irradiation.
Rapport Oak Ridge National Laboratory O.R.N.L.
n°3885 (1965) et N°3951 (1966).

(13) J.L. KAAE

J. of Nuclear Materials, vol.29, p.249, (1969).

(14) J. MANDEL

C.R.Ac. Sc. - t.247 - p.175 - (1958).

(15) J. MANDEL

Cours de Mécanique des Milieux Continus
Tome II - Annexe XXI - Gauthier Villars (1966).

(16) J. MICHELL

Proc. London Math. Soc., vol.31, p.100, (1899).

(17) E.H. LEE et T.G. ROGERS

Non linear Effects of Temperature variation in
Stress Analysis of isothermal linear Viscoelastic.
Materials Second Order Effect in Elasticity,
Plasticity and Fluid Dynamics.
Int. Symposium Haifa (1962).

(18) L.W. MORLAND et E.H. LEE

Trans. of Society of Rheology, IV, p.233, (1960).

(19) P.J. NETLEY, H. BRIDGE et J.H.W. SIMMONS

J. Bri. Nucl. Energ. Society, vol.4, p.267, (1963).

(20) A.J. PERKS et J.H.W. SIMMONS

Carbon - vol.1, p.441, (1963).

(21) A.J. PERKS et J.H.W. SIMMONS

Carbon - vol.4, p.85, (1966).

(22) L. PATARIN

Comportement mécanique d'une pièce de graphite
soumise au flux neutronique et maintenue à longueur
constante.
Rapport C.E.A. DEP/SEMT/M/1065.

(23) W.N. REYNOLDS

Physical Properties of Graphite
Elsevier Publishing Co. Ltd (1968).

(24) J. RAPENEAU et al

Carbon - vol.3, p.407, (1966).

(25) J.H.W. SIMMONS

Radiation Damage in Solids.
Pergamon Press (1965).

(26) E. STERNBERG et M.E. GURTIN

Further Study of Thermal Stress in a Viscoelastic
Materials with Temperature Dependent Properties.
Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and
Fluid Dynamics. Int. Symposium Haifa (1962).

(27) F. SCHWARZL et A.J. STAVERMAN

Journal of Applied Phys., vol.23, p.838, (1952).

(28) F.G. TRICOMI

Integral Equations.
New-York Interscience (1957).

(29) S. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER

Théorie de l'Elasticité.
Ch. Béranger (1961).

(30) H. LEADERMAN

Elastic and Creep Properties of Filamentous
Material. Textile Foundation - Washington D.C.
p.175 (1943).

31) E. STERNBERG

On the Analysis of Thermal Stresses in Viscoelastic
Solids.
Pergamon Press (1963).

(32) K.C. VALANIS et G. LIANIS

A.I.A.A. Journal, vol.2, N°9, p.1642, (1964).

- [33] K. MUKI et E. STERNBERG
J. Appl. Mechanics - N°2 - p.193 (1961).
- [34] J. MANDEL
Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome I
Gauthier Villars (1966).
- [35] E.N. ANDRADE
Nature, vol.156, p.113, (1945).
- [36] G. SCHOEK
J. Appl. Phys., vol.29, p.112, (1958).
- [37] J. WEERTMAN
J. Appl. Phys., vol.26, p.1213, (1955).
- [38] R.V. HESKETH
Phil. Mag., vol.9, N°92, p.1321, (1963).
- [39] J.A. TESK et C.Y. LI
Trans. Amer. Nucl. Soc., vol.12, N°1, p.133, (1969)
- [40] B.T. KELLY
Irradiation Damage to Solids.
Pergamon Press (1966).
- [41] SPENCER H. BUSH
Irradiation Effects in Cladding and Structural
Materials.
Rowand and Littlefield (1965).
- [42] T.S. HUCHINSON et D.C. BAIRD
The Physics of Engineering Solids.
2e Edition John Wiley (1968).
- [43] S.T. KONOBEVSKI
Effets des rayonnements sur les matériaux.
En russe, Atomizdat - (1967).
- [44] LEWTHWAITE et al
Nature, vol.216, p.472, (1967).

- (45) G. MARTIN et J.P. POIRIER
C.E.A. Saclay - à paraître dans J. Nucl. Mat.
- (46) A.C. ROBERTS et A.H. COTRELL
Phil. Mag. - vol.8, p.711, (1956).
- (47) M. ENGLANDER et C. THOMAS de MONTPREVILLE
C.E.A. Saclay - IXe Colloque de Métallurgie.
- (48) A. BRENAC et J. LETEURTRE
C.E.A. Fontenay aux Roses - Communication privée.
- (49) J. PONSOYE
C.E.A. Fontenay aux Roses - Communication privée.
- (50) N.V. HOFF
Les fondements de la mécanique du fluage dans un
corps métallique.
Résumé d'un cours fait à l'I.H.P. (1964).
- (51) F.K.G. ODQVIST
Proceedings of the Fourth Int. Congress of Appl.
Mech. P.228 - The University Press Cambridge (1935).
- (52) Y.N. RABOTNOV
Creep Problems in Structural Members.
North Holland (1969).
- (53) J.P. ANDRE et J. ERLER
Mem. Sc. Rev. Métall. Fr. 6C. - N°7-8, p.558 (1969).
- (54) J. MOTEFF et al
Trans. Amer. Nucl. Soc. - vol.11, p.148 (1968).
- (55) G.R. PIERCY
J. Nucl. Mat. - vol.26, p.18 (1968).
- (56) R.A. WOLF
Trans. Amer. Nucl. Soc., vol.12, p.589, (1969).
- (57) B.Z. HYATT
Private Communication - Bettis Atomic Power
Laboratory (1969).

- (58) F.A. NICHOLS
J. Nucl. Mat., vol.37, p.59, (1970).
- (59) R.V. HESKETH
Collapse of Vacancy Cascade to Dislocation Loops.
Proc. Int. Conf. Solid State Physic Research with
Accelerators
Brookhaven National Laboratory (1967).
- (60) R.V. HESKETH
J. Nucl. Mat., vol.26, p.77, (1968).
- (61) R.V. HESKETH
J. Nucl. Mat., vol.29, p.217, (1969).
- (62) F.A. NICHOLS
J. Nucl. Mat., vol.30, p.249, (1969).
- (63) J. SCHROEDER et M.J. HOLICKY
J. Nucl. Mat., vol.33, p.52, (1969).
- (64) J. FRIEDEL
Dislocations
Pergamon, 1964.
- (65) A.J. KENNEDY
Processes of Creep and Fatigue in Metals.
Oliver and Boyd, 1962.

A N N E X E I

CONDITIONS DE FERMETURE
POUR UN DOMAINE MULTICONNEXE.
EN ELASTICITE PLANE.

La résolution en contrainte des problèmes élastiques ou viscoélastique exige que l'on écrive en plus des relations de comportement et des équations de l'équilibre les conditions de compatibilité. Ces conditions sont nécessaires. Elles sont suffisantes lorsque le domaine D est à connexion linéaire simple c'est-à-dire tel qu'une courbe fermée quelconque tracée dans D puisse être réduite à zéro par déformation continue, sans sortir de D . Si le domaine considéré est multiconnexe, fig. 1 ces équations ne sont pas suffisantes, il faut écrire $6(n-1)$ condition supplémentaire n étant le degré de connexion du domaine (voir MANDEL (33), Page 36). Ces conditions, appelées conditions de fermeture expriment que le déplacement U et les rotations ω sont uniformes dans tout le domaine.

Problème plan.



$$n = 3$$

Soit U_1, U_2 les composantes du déplacement le long des axes x_1 et x_2 . Pour les problèmes de contrainte ou de déformation plane, les conditions de fermeture se réduisent à $3(n-1)$. On doit écrire sur le $(n-1)$, circuits fermés irréductibles du domaine, que les trois intégrales curvilignes suivantes sont nulles :

$$(1) \quad \oint (\varepsilon_{12,1} - \varepsilon_{11,2}) dx_1 + (\varepsilon_{22,1} - \varepsilon_{21,2}) dx_2 = 0$$

$$(2) \quad \oint U_{1,1} dx_1 + U_{1,2} dx_2 = 0$$

$$(3) \quad \oint U_{2,2} dx_2 + U_{2,1} dx_1 = 0$$

Les relations (2) et (3) peuvent s'écrire en introduisant les déformations :

$$(4) \quad \oint X_1 (\varepsilon_{11,1} dx_1 + \varepsilon_{11,2} dx_2) + X_2 (\varepsilon_{11,2} dx_2 + (2\varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1}) dx_1) = 0$$

$$(5) \quad \oint X_2 (\varepsilon_{22,2} dx_2 + \varepsilon_{22,1} dx_1) + X_1 (\varepsilon_{22,1} dx_1 + (2\varepsilon_{12,1} - \varepsilon_{11,2}) dx_2) = 0$$

Conditions de Mitchell

Mitchell (16) a le premier étudié le problème du corps multiconnexe soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel. En introduisant la fonction d'Airy Ψ , il arrive à écrire les conditions de fermeture (1), (4), (5), à l'aide de Ψ .

On se propose de retrouver ces trois conditions de fermeture pour un matériau élastique à symétrie transversale et soumis à des déformations non élastiques e_{ij}^n . Les relations de comportement s'écrivent en contrainte plane :

$$(7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} - e_{11}^* &= a_1 \sigma_{11} - a_2 \sigma_{22} \\ \varepsilon_{22} - e_{22}^* &= a_1 \sigma_{22} - a_2 \sigma_{11} \\ \varepsilon_{12} - e_{12}^* &= (a_1 + a_2) \sigma_{12} \end{aligned}$$

Avec

$$a_1 = \frac{1}{E_t} (1 - \nu_1 \nu_2) \quad a_2 = \frac{1}{E_t} (\nu_3 + \nu_1 \nu_2)$$

En déformation plane il faut y remplacer e_{ii}^n par $\nu_i e_{33} + e_{ii}^n$; $i=1,2$

En introduisant la fonction d'Airy définie par :

$$\sigma_{11} = \psi_{,22} \quad ; \quad \sigma_{22} = \psi_{,11} \quad ; \quad \sigma_{12} = \psi_{,12}$$

et en utilisant les relations de comportement (7), les conditions de fermeture (1), (4), (5) peuvent s'écrire :

$$(8) \quad a_1 \oint \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial n} = - \oint (e_{11,2} - e_{12,1}) dx_1 - (e_{22,1} - e_{12,2}) dx_2$$

$$(9) \quad (a_1 + a_2) [\psi_{,1}]_0^0 + \oint (x_1 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} - x_2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n}) ds =$$

$$- \oint x_1 [e_{11,1} dx_1 + e_{11,2} dx_2] + x_2 [e_{11,2} dx_1 - e_{22,1} dx_2] + 2x_2 e_{12,2} dx_2$$

$$(10) \quad (a_1 + a_2) [\psi_{,2}]_0^0 + a_1 \oint (x_2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} + x_1 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n}) ds =$$

$$- \oint x_2 [e_{22,2} dx_2 + e_{22,1} dx_1] + x_1 [e_{22,1} dx_2 - e_{11,2} dx_1] + 2x_1 e_{12,1} dx_1$$

n et s sont les vecteurs unitaires normaux et tangents au contour.

Δ est l'opérateur harmonique.

on montre par ailleurs que :

si $F_1(s)$ et $F_2(s)$ sont les composantes des Forces appliquées sur le contour, on a :

$$[\psi_{,1}]_0^0 = - \oint F_2(s) ds \quad \text{et} \quad \psi_{,2} = - \oint \bar{F}_1(s) ds$$

Les relations de Mitchell généralisées dont (8), (9), (10) doivent être écrites sur chaque contour irréductible.

A N N E X E I I

ANNEXE II: ORGANIGRAMME

Méthode des Eléments Finis avec Fluage

